



UNIVERSIDAD  
DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY

# Taller de Introducción a la Investigación de Operaciones - Optimización

Víctor Viana

[victor.viana@noreste.udelar.edu.uy](mailto:victor.viana@noreste.udelar.edu.uy)

10/4/2026

Introducción

Ejemplo

Variables de decisión, parámetros, restricciones y f. objetivo

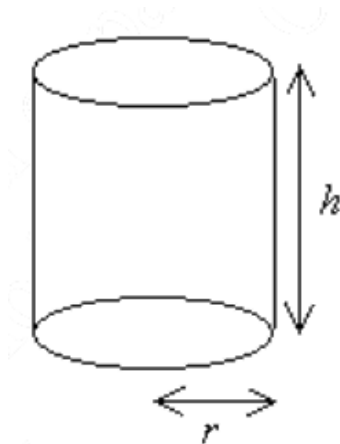
Formulaciones

Óptimos globales y locales

- ▶ Optimizar: hacer algo lo mejor posible
- ▶ Optimización: el arte de lograr optimizar

Nuestro objetivo: estudiar modelos matemáticos de problemas de decisión.

**Problema:** Minimizar el gasto de material para construir un tanque de agua de forma cilíndrica, sujeto a la restricción de que tenga cierta capacidad.



**Problema:** Minimizar el área de la lata, teniendo en cuenta que el volumen será de  $1 \text{ m}^3$

$$V = \pi hr^2 \text{ (volumen)}$$

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \text{ (superficie)}$$

El problema es encontrar valores de  $h$  y  $r$  que satisfacen  $\pi hr^2 = 1$  y que a la vez dan los valores mas bajos posibles de  $2\pi r^2 + 2\pi rh$

$$\text{minimizar } A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

sujeto a

$$V = \pi hr^2 = 1$$

La mejor formulación:

minimizar  $2\pi r^2 + 2\pi rh$

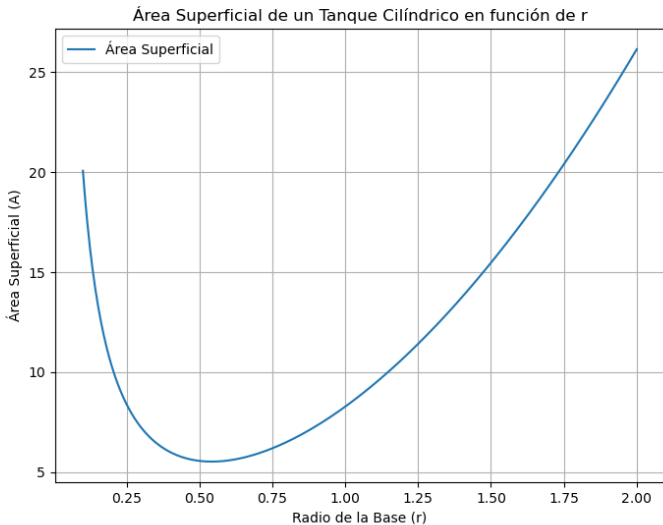
sujeto a

$$\pi hr^2 = 1$$

$$r > 0, h > 0$$

- ▶  $h$  y  $r$ : variables de decisión
- ▶  $2\pi r^2 + 2\pi rh$ : función objetivo
- ▶  $\pi hr^2 = 1, r > 0, h > 0$ : restricciones

# Área del cilindro en función del radio de la base



- ▶ Aquellos cantidades para las que se puede determinar su valor, porque están bajo el control del que toma las decisiones.
- ▶ Son las cantidades que me interesa optimizar cumpliendo ciertas condiciones, es decir las respuestas que se están buscando de un problema.
- ▶ Pueden surgir variables en el modelo que no estaban presentes en el análisis.



- ▶ Cantidad a producir.
- ▶ Cantidad a vender.
- ▶ Cantidad de horas-hombre.
- ▶ Cantidad de materiales.
- ▶ Cantidad de inventario.
- ▶ Cuando realizar una actividad.
- ▶ Donde ubicar una planta, equipo o producto.

- ▶ Aquellos valores que surgen del análisis de la realidad, y que no están bajo el control de quien toma las decisiones.
- ▶ La determinación entre variable de decisión y parámetros puede ser difícil de determinar, por ejemplo el precio de venta de un producto o la demanda a satisfacer.



- ▶ Costo variable de producir.
- ▶ Costo fijo de realizar una actividad.
- ▶ Costo de mantener en inventario.
- ▶ Precio o ganancia neta de venta.
- ▶ Demanda a satisfacer de un producto.
- ▶ Capacidad máxima de producción.
- ▶ Capacidad máxima de almacenamiento.
- ▶ Cantidad mínima para una actividad.

- ▶ Expresión que se quiere optimizar (minimizar o maximizar) y que vincula las variables de decisión con algunos de los parámetros (costos o ganancias).
- ▶ Para un determinado problema puede haber más de un objetivo posible a seleccionar (objetivo único o múltiples objetivos).
- ▶ Se debe tener presente que los valores que no están relacionados a las variables, no son optimizables.
- ▶ Puede haber situaciones en donde no haya una función a optimizar que resulte de forma natural.



- ▶ Minimizar costos de producción.
- ▶ Maximizar la ganancia.
- ▶ Maximizar la cantidad a producir.
- ▶ Minimizar los tiempos de producción.
- ▶ Minimizar las cantidades de materiales.
- ▶ Minimizar cambios de producción.
- ▶ Maximizar el uso de materiales.
- ▶ Minimizar(Maximizar) cantidad de empleados.

- ▶ Expresiones que involucran variables y parámetros que representan las exigencias que debe cumplir la solución que buscamos.
- ▶ Muchas veces requieren de esfuerzo y habilidad para formular las restricciones del problema de forma cuantitativa.
- ▶ La cantidad y la forma inciden de manera importante en la dificultad de resolución.



- ▶ Limitaciones en la capacidad de producción.
- ▶ Demanda que se debe satisfacer.
- ▶ Relaciones de balance entrada/salida.
- ▶ Cantidad de recursos materiales, financieros o humanos disponibles.
- ▶ Consideraciones de calidad o sociales que se deben respetar.
- ▶ Conjunto de valores posibles que pueden tomar las variables de decisión.
- ▶ No negatividad de las variables.

- ▶ Por distintas circunstancias puede ser necesario “suavizar” una restricción para adecuarla a situaciones en que hay flexibilidad:
  - ▶ se permite producir “un poco” por arriba de la capacidad;
  - ▶ se está dispuesto a “no cumplir exactamente” con la demanda estipulada.
- ▶ Para atender la necesidad de suavizar las restricciones suele ser necesario agregar variables, nuevas restricciones y modificar la función objetivo.

minimizar  $f(x_1, x_2) = 2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2$

sujeto a

$$g(x_1, x_2) = \pi x_1^2 x_2 = 1$$

$$x_1 > 0$$

$$x_2 > 0$$

Sea  $A$  un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}$  y  $f$  una función real con dominio en  $A$ , es decir:  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}, A \rightarrow \mathbb{R}$ .

Llamamos **problema de optimización matemática** a todo problema que responda a la formulación siguiente:

$$\begin{aligned} & [OPT]_X f(X) \\ & \text{s.a.} \\ & X \in B, B \subseteq A \end{aligned}$$

El conjunto  $B$  se suele denominar **conjunto de restricciones** del problema, mientras que el vector  $X$  se llama **óptimo del problema**.

El punto  $X$  es un vector:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Se busca el vector  $X$  que optimiza una función de  $n$  variables sujeta a  $m_1$  restricciones de igualdad ( $=$ ),  $m_2$  restricciones de desigualdad menor o igual ( $\leq$ ) y  $m_3$  restricciones de desigualdad superior o igual ( $\geq$ ).

[OPT] $f(X)$

$X$

s.a

$$h_i(X) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m_1\},$$

$$g_j(X) \leq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, m_2\},$$

$$k_s(X) \geq 0 \quad \forall s \in \{1, \dots, m_3\},$$

[OPT] $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$x_1, x_2, \dots, x_n$

s.a

$$h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m_1\},$$

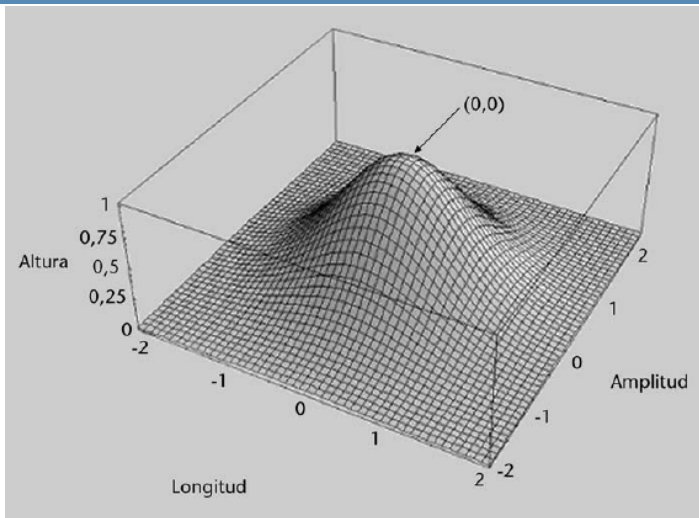
$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$$

$$k_s(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$$

- ▶ **Óptimos globales:** diremos que  $X^* \in B$  es un máximo (mínimo) global del problema de optimización si

$$\forall X \in B, f(X^*) \geq f(X) (f(X^*) \leq f(X))$$

- ▶ Si la desigualdad es estricta hablaremos de óptimo global estricto (máximo o mínimo),
- ▶ y, en caso contrario, de óptimo global relativo (máximo o mínimo).



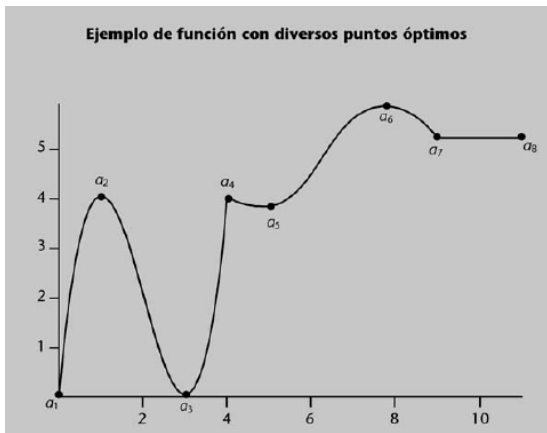
**Figura:** La función  $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ , alcanza un máximo global estricto no restringido en el punto  $(0,0)$

- ▶ **Óptimos locales:** diremos que  $X^* \in B$  es un máximo (mínimo) local del problema de optimización si

$$\exists \varepsilon \geq 0, \forall X \in B, \|X^* - X\| < \varepsilon, X^* - X \neq 0, \\ \text{se tiene que } f(X^*) \geq f(X) (f(X^*) \leq f(X))$$

- ▶ Si la desigualdad es estricta hablaremos de óptimo local estricto (máximo o mínimo),
- ▶ y, en caso contrario, de óptimo local relativo (máximo o mínimo).

$$f(x) = \begin{cases} x(x-3)^2 & \text{si } x \leq 4 \\ \sin(x) - \sin(4) + 4 & \text{si } 4 \leq x \leq 9 \\ \sin(9) - \sin(4) + 4 & \text{si } x \geq 9 \end{cases}$$



- ▶ Mínimos globales referentes a  $a_1$  y  $a_3$  ( $a_1$  es relativo, ya que hay otro punto, en este caso  $a_3$ , para el cual la función alcanza el mismo valor, y viceversa).
- ▶ Máximos locales referentes a  $a_2$  y  $a_4$  (son locales porque la función, en otros puntos del intervalo considerado, alcanza valores superiores).
- ▶ Mínimo local estricto en  $a_5$ .
- ▶ Máximo global estricto en  $a_6$  (dado que es el punto donde, a lo largo del intervalo considerado, la función alcanza un valor más alto).
- ▶ Mínimos locales referentes al intervalo  $[a_7, a_8]$  (también es correcto afirmar que los puntos del intervalo  $[a_7, a_8]$  corresponden a máximos locales relativos).

Estructura de un problema general:

minimizar  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

sujeto a:  $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = 1 \dots n$

$h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = 1 \dots m$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$  en  $X$  (región factible)

minimizar (ó maximizar)  $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

variables:  $x_1, x_2, \dots, x_n$

parámetros:  $c_1, c_2, \dots, c_n$

Escrito de forma simplificada:

$$\text{mín(máx)} \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

- ▶ Clasificación:
  - ▶ Programación Lineal (LP)
  - ▶ Programación Entera (IP)
  - ▶ Programación Mixta Lineal y Entera (MILP)
  - ▶ Programación No Lineal (NLP)
  - ▶ Programación Mixta No Lineal y Entera (MNLP)
- ▶ La clasificación es importante para la resolución.
- ▶ Debido al tamaño y la dificultad suelen emplearse las computadoras para plantearlos y resolverlos.

## Programación Lineal (PL)

- ▶ Las funciones  $f$ ,  $g$ ,  $h$  son lineales  $x_1, x_2, \dots, x_n$  están en el “cuadrante” positivo
- ▶ Uso típico: planificación a mediano plazo
- ▶ Método mas común para resolverlo: Método Simplex

## Programación NO Lineal (PNL)

- ▶ Las funciones  $f$ ,  $g$ ,  $h$  **no** lineales
- ▶ Uso típico: optimización estructural
- ▶ Mas complejo de resolver
- ▶ En general se pueden resolver problemas de cientos de variables

## Programación Entera (PE)

- ▶ Las funciones  $f$ ,  $g$ ,  $h$  son lineales  $x_1, x_2, \dots, x_n$  enteras
- ▶ Uso típico:
  - ▶ planificación a corto plazo
  - ▶ planificación de inversiones
- ▶ Mas difíciles de resolver que los de PL

- ▶ Expresión lineal (función objetivo) a ser minimizada o maximizada
- ▶ Restricciones en forma de funciones lineales que no puede exceder algún valor específico
- ▶ Expresiones no lineales pueden convertirse a un forma lineal adecuada
- ▶ PL mas fácil de resolver que PNL

- ▶ Se producen 2 artículos: uno “standard” y otro “deluxe”
- ▶ Unidad “standard”: ganancia de \$10
- ▶ Unidad “deluxe”: ganancia de \$15
- ▶ Proceso de ensamblamiento: capacidad 80 hs semanales
- ▶ Proceso de pulido: capacidad 60 hs semanales

- ▶ Los tiempos en horas de ensamblamiento y pulido de cada tipo de producto es

	standard	deluxe
ensamble	4	2
pulido	2	5

- ▶ Cada unidad usa 4 kg. de materia prima. Se cuenta con 75 kg. de materia prima disponible

- ▶ ¿Como podemos maximizar las ganancias de la compañía?
- ▶ Modelo: variables de decisión  $x_1$  y  $x_2$  (cantidad de productos “standard” y “deluxe”)
- ▶ Restricciones:
  - ▶  $4x_1 + 4x_2 \leq 75$  (disponibilidad de materia prima)
  - ▶  $4x_1 + 2x_2 \leq 80$  (ensamble)
  - ▶  $2x_1 + 5x_2 \leq 60$  (pulido)

- ▶ Función objetivo: maximizar  $10x_1 + 15x_2$
- ▶ En resumen:  
maximizar  $10x_1 + 15x_2$   
sujeto a  $4x_1 + 4x_2 \leq 75$   
 $4x_1 + 2x_2 \leq 80$   
 $2x_1 + 5x_2 \leq 60$   
 $x_1, x_2 \geq 0$

Función objetivo representada en 3D

