

PRÁCTICO 3: ALGORITMO DE EUCLIDES EXTENDIDO - ECUACIONES DIOFÁNTICAS

Algoritmo de Euclides extendido

Ejercicio 1. En cada caso usar el Algoritmo de Euclides Extendido para calcular el $\text{mcd}(a, b)$ y coeficientes de Bezout de a y b .

a. $a = 63, b = 15$.

c. $a = 138, b = 18$.

e. $a = 2366, b = 273$.

b. $a = 1872, b = 360$.

d. $a = 455, b = 1235$.

Ecuaciones diofánticas lineales

Ejercicio 2.

a. Se desean comprar 430 dólares en cheques de viajero. Los cheques solamente vienen de 20 y de 50 dólares. ¿Cuántos cheques de cada cantidad deberán adquirirse?

b. La edad de Juan hace diez años, más la de Fátima hace diez años, suman un cuarto de la edad actual de Juan. ¿Qué edades, en años, tienen actualmente Juan y Fátima? (asuma que ambos tienen al menos diez años actualmente).

Ejercicio 3. Una mujer tiene un cesto de manzanas. Haciendo grupos de 3, le sobran 2, y haciendo grupos de 4, le sobran 3. Hallar el número de manzanas que contiene el cesto, sabiendo que está entre 100 y 110.

Ejercicio 4. Un hombre va a una ferretería a comprar un trozo de burlete de goma de x metros con y centímetros. Pero el ferretero confunde los metros con centímetros y viceversa, cortando una cantidad distinta de la que el cliente había pedido. Sin percatarse de ello, el cliente toma su paquete y se marcha. Cuando llega a su casa, corta 68 centímetros de burlete y, para su sorpresa, descubre que le queda el doble de lo que pensaba que había comprado. ¿Cuál es la menor cantidad de burlete (en metros y centímetros) que pudo haber pedido dicho cliente?

Ejercicio 5. Una persona compra un artículo que cuesta \$480. La persona tiene un billete de \$1000 y tres billetes de \$10; mientras que el cajero tiene 6 billetes de \$100 y 7 de \$50. ¿De cuántas maneras le puede dar el cambio el cajero?

Ejercicio 6. En el cambio de turno de una fábrica de cerámicas, Alex, obrero que finalizaba su trabajo, dejó preparado un embarque de baldosas para un hospital en construcción. Armó una caja de 42 baldosas y dejó escrito: "Pérez: va esta caja de 42 unidades y el resto son cajas de 50 unidades". La Sra. Pérez, luego de subir al camión la caja de 42 unidades, comenzó a colocar las de 50 unidades, cuando se preguntó: ¿cuántas de 50 hay que llevar? Subió a Administración, donde el Sr. Fernández le dijo que eran entre 20 y 40 cajas. Además, encontraron un papel que decía: "Baldosas de cerámica para el Hospital Cristóbal Colón. Salas de 32 baldosas + una sala chica de 20 baldosas". ¿Cuántas baldosas precisa el hospital?

Ejercicio 7. Sean $a, b \in \mathbb{N}$. Se considera el segmento del plano cartesiano que tiene por extremos a los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$.

- a. ¿Cuántos puntos de coordenadas enteras hay en dicho segmento?
- b. Usando lo anterior, calcule la cantidad de puntos cuando $a = 12$ y $b = 20$.

Existencia de soluciones no negativas

Los ejercicios de esta sección se deben responder **sin hallar soluciones** de la ecuación diofántica asociada al problema. El objetivo es usar el Teorema de existencia de soluciones enteras no negativas.

Ejercicio 8. Tenemos tickets de alimentación de 200 pesos y de 70 pesos, y en una tienda venden todos los productos a 10 pesos. Probar que, si nuestra compra supera los 113 productos, no tendremos inconveniente para pagar con tickets.

Ejercicio 9. Tenemos cupones de compra de a pesos y de b pesos (tantos como queramos). En cada caso, determine si es posible comprar un artículo de n pesos, utilizando únicamente los cupones disponibles.

- a. Artículo de $n = 555$ pesos, con cupones de $a = 25$ y $b = 24$ pesos.
- b. $n = 551$, $a = 25$ y $b = 24$.
- c. $n = 2780$, $a = 125$ y $b = 120$.

Ejercicios complementarios

Ejercicio 10. Una compañía compró cierto número de reliquias falsas a \$17 cada una y vendió algunas de ellas a \$49 cada una. Si la cantidad comprada originalmente es mayor que 50 pero menor que 100, y la compañía obtuvo una ganancia de \$245, ¿cuántas reliquias faltan por vender?

Ejercicio 11.

- a. Determinar los enteros w, x e y que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diofánticas lineales:

$$\begin{cases} w + x + y = 50 \\ w + 13x + 31y = 116 \end{cases}, \quad w, x, y \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

- b. ¿Existe una solución de (1) tal que $w > 0$, $x > 0$ e $y > 0$? En caso afirmativo calcular una.
- c. ¿Existe una solución de (1) tal que $w > 10$, $x > 18$ e $y > -15$? En caso afirmativo calcular una.