Determinantes

Ejercicio 1

Calcule los determinantes de las siguentes matrices desarrollando por filas o columnas:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B}* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{F}* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & 19 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ -1 & 1 & 16 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

Calcule los siguientes determinantes operando previamente con las filas y/o columnas de la matriz para simplificar el cálculo.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 10 & 30 & -30 \\ 2 & 5 & -9 \\ 2 & 10 & -6 \end{pmatrix}, \mathbf{D}* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & 6 & 1 \\ -2 & 6 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

Ejercicio 3

Sabiendo que :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$$

Calcular los siguentes determinantes:

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 6a & 15b & 9c \\ 14g & 35h & 21i \\ 4d & 10c & 6f \end{vmatrix}, |\mathbf{C}|* = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+3d & b+3c & c+3f \\ 2a-g & 2b-h & 2c-i \end{vmatrix}, |\mathbf{D}| = \begin{vmatrix} d-g & e-h & f-i \\ g-a & h-b & i-c \\ a-d & b-c & c-f \end{vmatrix}$$

*Ejercicio 4

Dada A $\in \mathcal{M}_{n\times n}$ y $\lambda \in \mathcal{R}$, probar que $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.
Sugerencia: Intente probarlo para matrices de 3x3 y luego generalice la prueba.

Ejercicio 5

En cada caso hallar $det(A)$ para A $\in \mathcal{M}_{n\times n}$ que cumple la condición dada:

a) $A^3 = I_n$

b)$A^1 0 = 0$

c) $det(AA^t) = 16$

d*) $det(A^2 A^t A^{-1}) = 9$

Inversa

Ejercicio 6

Hallar la inversa y verificarla multiplicando las matrices.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C}* = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando las matrices inversas calculadas en la parte anterior. Verifique los calculos.

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C}* \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8

Verdadero o falso. Justificar

a) Si A y B son invertibles y $\alpha \neq 0$ entonces $(\alpha AB)^{-1} = \frac{1}{a} B^{-1} A^{-1}$
b) Si A es invertible entonces $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$
c) Si A y B son invertibles entonces $A + B$ es invertible.

Ejercicio 9

Sean A y B dos matrices cuadradas invertibles, probar:

a*)$(A * B)^{-1} = B^{-1} * A^{-1}$

b) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

Sugerencia: Para probar $A^{-1} = B$ hay que probar que $A * B = B * A = I_d$

Nota

Los ejercicios con asterico (*) son los ejercicios a realizar para el entregable.