

Sistemas de ecuaciones

Ejercicio 1

Expresar en forma matricial y resolver en \mathbb{R} los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, usando el método de escalarización.

$$(a) \begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} -x + y - z = -1 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

$$(c^*) \begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 3 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$$

$$(e^*) \begin{cases} 5x - y - z = 4 \\ x - y + 2z = -5 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$(g^*) \begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + (a - 5)z = a \end{cases} \quad \text{discutir según } a \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 2*

Considerar los siguientes sistemas de ecuaciones e indicar la opción correcta:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x + ay = 3 \end{cases}$$

- i. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$ los sistemas tienen el mismo conjunto solución.
- ii. Si los sistemas tienen el mismo conjunto solución entonces $a = 2$.
- iii. Si $a = -1$ los sistemas tienen el mismo conjunto solución.
- iv. Si $a \neq -1$ los sistemas no tienen el mismo conjunto solución.
- v. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$ los sistemas no tienen el mismo conjunto solución.

Ejercicio 3

¿ Para qué valores de k tiene soluciones no triviales el sistema? Intenta averiguarlo sin resolverlo.

$$(a) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 4y + kz = 0 \end{cases}$$

Nota: la solución trivial es $x=y=z=0$.

Ejercicio 4

Para los siguientes sistemas, encuentre qué condición deben cumplir a , b y c para que el sistema sea incompatible.

$$(a) \begin{cases} 2x - y + 3z = a \\ 3x + y - 5z = b \\ -5x - 5y + 21z = c \end{cases}$$

$$(b^*) \begin{cases} 2x + 3y - z = a \\ x - y + 3z = b \\ 3x + 7y - 5z = c \end{cases}$$

El espacio vectorial \mathbb{R}^n

Ejercicio 5

Consideremos las 4-uplas

$$X_1 = (1, 2, 2, 1) \quad X_2 = (2, 1, -2, 0) \quad X_3 = (-1, 1, 4, 1)$$

hallar las combinaciones lineales $aX_1 + bX_2 + cX_3$ para:

1. $a = 0$; $b = 2$; $c = 5$

2. $a = -3; \quad b = 2; \quad c = 1$
3. $a = 1; \quad b = -1; \quad c = -1$

Ejercicio 6

Consideremos el conjunto

$$A = \{(1, 0, 1, -1), (2, 0, 3, 1), (0, 2, 1, 0)\}$$

formado por tres 4-uplas de números reales. Determinar en cada caso si X puede obtenerse como combinación lineal de los elementos de A . Si la respuesta es afirmativa hallar los respectivos coeficientes.

1. $X = (0, 2, 0, -3)$
- 2*. $X = (5, -2, 0, 0)$
3. $X = (5, -6, 4, 1)$

Ejercicio 7

En todos los casos hallar todos los vectores que son combinación lineal de U :

1. $U = \{(1, 0, 2), (-1, 2, 1)\}$
2. $U = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 2, 3)\}$
- 3*. $U = \{(-1, -1, 1, 1), (1, 2, 3, 4)\}$
4. $U = \{(1, 1, 1), (2, 0, 2), (-7, 1, -7), (1, 3, 1)\}$
5. $U = \{(2, 1), (1, -1), (1, 2), (2, -2)\}$

Ejercicio 8*

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. Si el conjunto sólo tiene un vector, el conjunto es LD si y sólo si el vector es el vector cero.
2. Si el vector cero pertenece a un conjunto de vectores, el conjunto es LI.
3. Si el conjunto consta de más de un vector: el conjunto es LI si y solamente si un vector del conjunto es combinación lineal de los restantes.
4. Si en un conjunto de vectores uno de ellos es múltiplo escalar de otro el conjunto es LI.

5. Si un conjunto de vectores contiene un subconjunto de vectores que es LI, el conjunto es a su vez LI.
6. Si un conjunto de vectores es LI, entonces cualquier subconjunto de él también será LI.
7. Si un conjunto de vectores es LD, entonces cualquier vector es CL de los otros.

Ejercicio 9

Indicar si los siguientes conjuntos son L.I. o L.D. indicando en cada caso el rango del mismo:

1. $A = \{(3, 1), (2, 3)\}$
2. $U = \{(1, 1, 3), (3, 5, 5), (2, 1, 8)\}$
3. $E = \{(2, 1, 3), (1, 2, 1), (1, 1, 4), (1, -5, 1)\}$
- 4*. $B = \{(1, -1, 2, 1, 5), (2, 1, 0, 1, 3), (0, 1, -2, 1, 1)\}$
5. $T = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, k)\}$ discutiendo según k .

Nota

Los ejercicios con asterico (*) son los ejercicios a realizar para el entregable.