Matrices

Ejercicio 1

Construye en cada caso una matriz A que cumpla:

(a) A $\in \mathcal{M}_{2\times 2}/a_{11} = 10,\ a_{12} = a_{22} = 15,\ a_{21} = 7$

(b) A $\in \mathcal{M}_{3\times 2}/a_{ij} = i + j$

(c) A $\in \mathcal{M}_{3\times 3}/a_{ij} = \begin{cases} i\ si\ i \leq j \\ 0\ si\ i>j \end{cases}$

(d) A $\in \mathcal{M}_{3\times 2}/a_{ij} = 2i - j$

Ejercicio 2

Considere las matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule en caso de ser posible:

(i) 3A

(ii) -2C

(iii) D+E

(iv) B-G

(v) B+A

(vi) $(B^t)^t$

(vii) $3A + C^t$

(b) Plantea todas las multiplicaciones de dos factores que es posible realizar con las matrices dadas y realice aquellas en las que no resulten matrices cuadradas.

Ejercicio 3

(a) Definición: Si $B^t = B$ se dice que B es simétrica. De un ejemplo de una matriz simétrica.
(b) Definición: Si $B^t = -B$ se dice que B es antisimétrica. De un ejemplo de una matriz antisimétrica.

Ejercicio 4

Demuestre las siguentes propiedades:

(a) $(A + B)^t = A^t + B^t \ \forall A, B \in \mathcal{M}_{3\times3}$

(b) $(pA)^t = p \times A^t \ \ \forall A \in \mathcal{M}_{2\times3}$ y $p \in \mathbb{R}$

(c) $(A \times B)^t = B^t \times A^t \ \forall A, B \in \mathcal{M}_{2\times2}$

(d) $(A^t)^t = A \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}$

Ejercicio 5

Calcule a y $b \in \mathbb{R}$ para que:

$$\begin{pmatrix} a+b & -2 \\ 3 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6

Dadas:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcule:

(a) $A + A^t$

(b) $2C - 7I_d$

(c) $B^t \times B$

(d) $B \times B^t$

(e) Encuentre todas las matrices $\mathbf{X}$ que verifiquen:

$$2A - 4\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7

Se dice que dos matrices conmutan cuando $A \times B = B \times A$.
(a) Para la matriz B del ejercicio 6 proponga una matriz A conforme y verifique si conmutan.
(b) Proponga dos matrices de 2×2 que conmuten y dos matrices de 2×2 que no conmuten. (Sugerencia: Revea lo obtenido en los ejercico 6 (c) y 6 (d)).
(c)Discuta la conmutatividad del producto de matrices.

Ejercicio 8

(a) Pruebe que $A + A^t$ es simétrica $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times m}$.

(b) Pruebe que $A - A^t$ es antisimétrica $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times m}$.

(c) Halla todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ que hacen simétrica a la matriz:

$$\begin{pmatrix} a & a^2+2 & 5 \\ -3a & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9

Se define como traza de una matriz cuadrada a la suma de sus elementos diagonales, es decir

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(a) Calcule $tr(C)$ para la matriz C del ejercicio 6.

(b) Pruebe que $tr(A+B) = tr(A) + tr(B) \ \ \forall A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}$.

(c) Repite la demostración anterior $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times m}$.

(d) Pruebe que $tr(A) = tr(A^t) \ \forall A \in \mathcal{M}_{m\times m}$.

(e) Pruebe que $tr(A \times B) = tr(B \times A) \ \forall A, B \in \mathcal{M}_{3\times 3}$