Sistemas de ecuaciones

→ Escalerización

Ej:

método viejo

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases} \qquad x+x=2 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1 \qquad x=y \Rightarrow y=1$$

Escalerización

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2/2 & -2/2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & +1 & +1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & +1 & +1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightarrow x=1 \\ \rightarrow y=1 \end{array}$$

→ El método de escalerización busca generar ceros abajo de la diagonal

Tipos de sist. de ecs.

→ Compatibles determinados

• Tienen una única solución

Ej: el anterior

→ Compatibles indeterminados

• Tienen infinitas soluciones

Ej 1

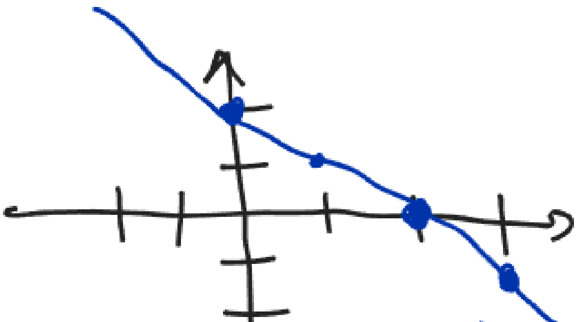
$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$0=0$

$x+y=2$

$$\begin{cases} (1,1) \\ (2,0) \\ (0,2) \end{cases}$$



$x+y=2$

↑ $y=2-x$ → $(x, 2-x)$

∞ sol.

Ej2:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+2y+2z=6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x+y+z=3$

∞ sol.

$$\begin{cases} (3,0,0) \\ (1,1,1) \end{cases}$$

→ incompatibles

- $\nexists$ solución

Ej:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$0x+0y=1$ Absurdo

Ejs:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & +3 & +7 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 7/3 \end{array}\right)$$

$\frac{-3}{3} \quad \frac{-3}{3}$

$-3y=-7 \Rightarrow y=\frac{7}{3}$

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-y=1 \end{cases} \longrightarrow SCD: \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x-y+2z=2 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$x+y+z=0$

$-4y-z=2$

$\boxed{z=-2-4y}$

$y=\frac{-2}{3}+\frac{1}{3}x \leftarrow x+y-2-4y=0$

$\boxed{x=2+3y}$

$Sol: (2+3y, y, -2-4y)$

$\left(x, -\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x, -2-4\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x\right)\right)$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow SCD$$

$Sol: \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \\ x=\frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow SI$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \\ 3x+3y=3 \end{cases} \rightarrow SCI$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z=1 \end{cases} \rightarrow \cancel{SCD}$$

Vectores

$X \in \mathbb{R}^n$ $\quad X=(x_1,\dots,x_n) \quad x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$

vector de $\mathbb{R}^n$

$(1,1,0)$

$(7,14,20)$

$(1,1)$

$(1,2,3,4)$

Combinación lineal

Dado A un conjunto de vectores

$A=\{X_1,X_2,\dots,X_m\}$, $X_1,\dots,X_m \in \mathbb{R}^n$

$X_1=(x_1,\dots,x_n)$

$x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$

Una comb. lineal de A es otro vector que se obtiene sumando múltiplos de los vectores de A

Dados m coef. $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow Z = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \_\_\_ + \lambda_m X_m$$

Ej.: $A = \left\{ \begin{matrix} (1,2) \\ (0,1) \end{matrix} \right\}$ (1,1) es CL de A con coeficientes $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

$$1 \cdot (1,2) + (0,1)(-1) = (1,1)$$

Dado conj. vec. A y otro vector X ⇒

¿es X C.L de A?

$A = \{(1,3,2), (1,1,1)\}$

$X = (7,4,5)$

Dado conj. vec. A y otro vector $X \Rightarrow$ ¿es X C.L de A?

¿$\exists\ \lambda_1, \lambda_2$ / $\lambda_1(1,3,2) + \lambda_2(1,1,1) = (7,4,5)$?

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 7 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 4 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 5 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1 - F_2} \\ \\ \xrightarrow{F_3 - 2F_2} \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightarrow \lambda_2 = 8 \\ \rightarrow \lambda_1 = -1 \\ \rightarrow \lambda_2 = 7 \end{array}$$

$\nexists$

$\Rightarrow$ SI

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \ \nexists$$

$A = \{(1,0), (0,1)\}$

$\Rightarrow \quad x = (7,5)$

$\{(1,0,0)\ \ (0,1,0)\}$ $\quad (x, y, 0)$

c.L $(7,4,0)$

NO c.L $(1,1,1)$

$A = \{\underbrace{(1,3,4), (2,1,2)}\}$

$x = (-4,3,2)$

¿Es x c.L de A?

si es, cuál es λ_1 y λ_2?

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{F_2-3F_1} \\ \xrightarrow{F_3-4F_1} \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -5 & 15 \\ 0 & -6 & 18 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to \lambda_1 + 2\lambda_2 = -4 \Rightarrow \lambda_1 - 6 = -4 \quad \lambda_1 = 2 \\ \to \lambda_2 = -3 \\ \to \lambda_2 = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix} \end{array}$$

$$A\{\underbrace{(1,1),(1,0),(0,1)}\}$$

$$X = (2,2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ \to \lambda_2 = \lambda_3 \end{array}$$

$$\lambda_2 = 2 - \lambda_1$$

SCI

$$\text{sol}: (\lambda_1, 2-\lambda_1, 2-\lambda_1)$$

$$(1, 1, 1)$$

$$(3, -1, -1)$$