Matemática 2

Ejercicios de repaso para primer parcial 2024

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE
Universidad de la República

9 de Mayo de 2024

Problema 1

Calcule los determinantes de las siguentes matrices:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & 19 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ -1 & 1 & 16 & 2 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 11 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 19 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 16 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 16 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Problema 2

Dado $A \in M_{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Problema 3

Para las matrices A, B y C del primer ejercicio hallar sus matrices inversas.

Problema 4

Decir qué tipo de sistema es según $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + (k-5)z = k \end{cases}$$

Problema 5

Consideremos el conjunto

$$A = \{(1,0,1,-1), (2,0,3,1), (0,2,1,0)\}$$

formado por tres 4-uplas de números reales. Determinar en cada caso si X puede obtenerse como combinación lineal de los elementos de A. Si la respuesta es afirmativa, hallar los respectivos coeficientes:

1. $X = (0, 2, 0, -3)$
2. $X = (5, -2, 0, 0)$
3. $X = (5, -6, 4, 1)$

Problema 6

En todos los casos hallar todos los vectores que son combinación lineal de U:

1. $U = \{(1, 0, 2), (-1, 2, 1)\}$
2. $U = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 2, 3)\}$
3. $U = \{(-1, -1, 1, 1), (1, 2, 3, 4)\}$
4. $U = \{(1, 1, 1), (2, 0, 2), (-7, 1, -7), (1, 3, 1)\}$
5. $U = \{(2, 1), (1, -1), (1, 2), (2, -2)\}$

Problema 7

Indicar si los siguientes conjuntos son linealmente independientes (L.I.) o linealmente dependientes (L.D.), indicando en cada caso el rango del mismo:

1. $A = \{(3, 1), (2, 3)\}$
2. $U = \{(1, 1, 3), (3, 5, 5), (2, 1, 8)\}$
3. $E = \{(2, 1, 3), (1, 2, 1), (1, 1, 4), (1, -5, 1)\}$
4. $B = \{(1, -1, 2, 1, 5), (2, 1, 0, 1, 3), (0, 1, -2, 1, 1)\}$
5. $T = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, k)\}$ discutiendo según k.

Problema 8

Hallar la intersección de los siguientes planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} x = 1 - 2\delta + \mu, \\ y = -1 - \delta + 2\mu, \\ z = -2 - 2\delta - \mu \end{cases}$$

$$\pi_2 : \quad 2x - 3y + 4z = -2$$

Problema 9

Hallar la intersección del plano y la recta:

$$\pi : \begin{cases} x = 2 - \delta + \mu, \\ y = -1 - \delta + 2\mu, \\ z = -2 - 2\delta - \mu \end{cases}$$

$$r : \begin{cases} x = \alpha, \\ y = 1 - 2\alpha, \\ z = -1 - \alpha \end{cases}$$

Problema 10

Se consideran los planos y las rectas. Hallar la intersección de cada una de las dos rectas con cada uno de los dos planos:
Planos:

- π_1:
$$\begin{cases} x = 1 + 2\delta + 2\mu, \\ y = -3 + \delta - \mu, \\ z = \delta + \mu \end{cases}$$

- π_2:
$$2x + y + z - 2 = 0$$

Rectas:

- r_1:
$$\begin{cases} x = 3 + \alpha, \\ y = 4 + \alpha, \\ z = 1 - 3\alpha \end{cases}$$

- r_2, definida por el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x + y - 3z + 6 = 0, \\ \quad x + 2y - 4z = -8 \end{cases}$$

Problema 11

Probar que las rectas son perpendiculares
r:
$$\begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0, \\ 2x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

R:
$$\begin{cases} \ x + y - 3z - 1 = 0, \\ 2x - y - 9z - 2 = 0 \end{cases}$$

Problema 12

(a) Verificar que los siguientes planos son paralelos:

$$2x - 3y + 6z = 14 \quad \text{y} \quad 4x - 6y + 12z = -21$$

(b) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas del plano que pasa por

$P = (1, 2, -1)$, es perpendicular al plano $3x + y - 2z = 8$ y paralelo a la recta r:

$$r : \begin{cases} x = 2z + 2, \\ y = z \end{cases}$$

Problema 13

(a) Hallar el ángulo entre las rectas:

r:

$$\begin{cases} x = \lambda + 2, \\ y = 3\lambda + 1, \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$$

R, definida por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0, \\ 2x - y - 9z - 2 = 0 \end{cases}$$

(b) Averiguar si la recta r y el plano $2x - 4y - 6z = 1$ son paralelos.

Problema 14

Dados los planos:
Plano π_1:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu, \\ y = 2\lambda + \mu, \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Plano π_2:

$$\begin{cases} x = \lambda, \\ y = 2 - \lambda - \mu, \\ z = \mu \end{cases}$$

(a) Compruebe que el punto (1,0,1) corresponde a ambos planos y por ende a la intersección de los planos.

(b) Halle la intersección entre los planos utilizando el producto vectorial.

Problema 15

(a) Verifique si los puntos $(1, 2, 3)$ y $(2, 0, 0)$ pertenecen al plano π y a la recta r:

$$\pi : 2x + y - 2z + 2 = 0$$

$$r : \begin{cases} x = z + 2, \\ y = 3z \end{cases}$$

Halle un punto que pertenezca tanto a la recta como al plano.

(b) Dados las rectas en $\mathbb{R}^3$ con $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$r_1 : \begin{cases} x = 3 + \lambda, \\ y = 5 + 2\lambda, \\ z = 0 \end{cases}$$

$$r_2 : \begin{cases} y = 2x - 1, \\ z = 0 \end{cases}$$

Determine la posición relativa de las mismas en el espacio y el ángulo que forman si es posible.

(c) Compruebe si existe alguna recta que pase por los puntos $P : (3, 1, 0)$, $Q : (0, -5, 1)$, y $R : (6, -5, 1)$.

(d) Determine la ecuación del plano que contiene al punto $P : (2, 1, 2)$ y a la recta R dada por:

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 4}{-3}$$

Problema 16

(a) Dados los vectores $\mathbf{u} = (1, 0, 1, 0)$ y $\mathbf{v} = (0, 2, 2, 1)$, calcular:

- Norma de $\mathbf{u}$: $||\mathbf{u}||$
- Norma de $\mathbf{v}$: $||\mathbf{v}||$
- Coseno del ángulo entre ellos.

(b) Determine si las siguientes rectas en $\mathbb{R}^3$, definidas por las siguientes ecuaciones, con $\lambda \in \mathbb{R}$ son perpendiculares:

$$\begin{cases} x = 3 + 4\lambda, \\ y = 3 + 2\lambda, \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y - 6z - 5 = 0, \\ 3x - 4y - 5z + 8 = 0 \end{cases}$$

(c) Hallar las ecuaciones paramétricas y reducida del plano que pasa por el punto $P = (1, 2, 1)$, es perpendicular al plano $\pi : 3x + y - 2z - 8 = 0$ y paralelo a la recta:

$$\begin{cases} x = z + 1, \\ y = z \end{cases}$$

Problema 17

(a) Sean r_1 y r_2 rectas en $\mathbb{R}^3$, explique y bosqueje las posiciones relativas que r_1 y r_2 pueden tener en el espacio.

(b) Sea $r_1 \in \mathbb{R}^3$ determinada por los puntos $A = (-1, 1, 0)$ y $B = (3, 2, 1)$, escribir las ecuaciones paramétricas e implícitas asociadas a r_1.

(c) Considera además $r_2 \in \mathbb{R}^3$ definida por las siguientes ecuaciones paramétricas, con $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x = 3 + 4\lambda, \\ y = 3 + 2\lambda, \\ z = 0 \end{cases}$$

¿Son los vectores directores de r_1 y r_2 combinación lineal uno del otro? Determinar la posición relativa entre r_1 y r_2.

(d) Definir producto escalar entre dos vectores de $\mathbb{R}^3$.

(e) Hallar una expresión para el ángulo entre las rectas r_1 y r_2.