1) $2A + 3B^t$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad 2A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad 3B^t = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

$$2A + 3B^t = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 7 \\ 10 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 17 \end{pmatrix}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad A^t \times 2A$ [Ojo respetar el orden por que el producto de matrices $\underline{\text{NO}}$ ES CONMUTATIVO]

$$\underset{A^t}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}} \times \underset{2A}{\begin{pmatrix} 4 & 8 & -2 \\ 6 & -2 & 12 \end{pmatrix}} \qquad A \times B \neq B \times A$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 & 2 \cdot 8 + 3 \cdot (-2) & 2(-2) + 3(12) \\ 4 \cdot 4 + (-1) \cdot 6 & 4 \cdot 8 + (-1)(-2) & 4(-2) + (-1)(12) \\ (-1)(4) + 6 \cdot 6 & (-1) 8 + 6 \cdot (-2) & (-1)(-2) + 6 \cdot 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 26 & 10 & 32 \\ 10 & 34 & -20 \\ 32 & -20 & 74 \end{pmatrix}$$

3) $A + A^t$ es simetrica?

Matriz simetrica $\Rightarrow A^t = A$

$$\Rightarrow (A + A^t) \overset{?}{=} (A + A^t)^t$$

Propiedades de la transpuesta

① $(A+B)^t = A^t + B^t$

② $(A^t)^t = A$

Propiedad suma:

③ $A+B = B+A$

$$(A + A^t)^t \underset{①}{=} A^t + (A^t)^t \underset{②}{=} A^t + A \underset{③}{=} A + A^t$$

$A - A^t$ es antisimetrica

Matriz antisimetrica: $A^t = -A$

$$(A - A^t)^t \overset{?}{=} -(A - A^t)$$

$$(A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t)$$

4) Hallar $a \in \mathbb{R}$ que haga simetrica a la matriz

$\hookrightarrow A^t = A$

$$\begin{pmatrix} a & a^2+2 & 2 \\ -3a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -3a & 2 \\ a^2+2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a = a$

$-3a = a^2 + 2 \Rightarrow a^2 + 2 + 3a = 0$ ↗ $a = -1$ ↘ $a = -2$

4) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow$ Calculo por F_3 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^6 \cdot 2 = \underline{\underline{12}}$

op elementales no cambian el $|A|$

$F_3 - F_2$

Escaneado con CamScanner

5) $A^3 = I_n \Rightarrow |A^3| = \underbrace{|I_n|}_{1}$ ②

$|A^3| = 1$

propiedad del determinante

$|A^n| = |A|^n \Rightarrow |A^3| = |A|^3 = 1 \Rightarrow \underline{|A| = 1}$

b) $A \cdot O = O \Rightarrow |A \cdot O| = |A| \cdot \underbrace{|O|}_{0} = \underbrace{|O|}_{0}$

Prop: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

$|A| \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ esto vale para $|A| = x \quad x \in \mathbb{R}$ cualquier número

c) $\det(A \cdot A^t) = 16$ Prop: $|A^t| = |A|$

$\Rightarrow |A \cdot A^t| = |A| \cdot |A^t| = |A| \cdot |A| = 16$

$|A| = \pm 4$.

6) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ → se puede calcular con cofactores o haciendo op elementales

$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 & -1/3 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ Se verifica $B \cdot B^{-1} = \mathbb{1}_{3\times3}$ (multiplicar las matrices)

7) $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ multiplicar B^{-1} a izq a ambos lados

$\underbrace{B^{-1} B}_{\mathbb{1}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 & -1/3 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

8)
a) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - 1/2 F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$

↳ sistema incompatible.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 - 2F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$x + 2y - z = 0 \rightarrow x = z - 2y \quad S = \{(z-2y, y, z)\}$

$\Rightarrow$ compatible indeterminado $\Rightarrow \infty$ soluciones

9) $A = \{(1,0,1,-1), (2,0,3,1), (0,2,1,0)\}$

$x = (5,-6,4,1) \Rightarrow x \overset{?}{=} \lambda_1(1,0,1,-1) + \lambda_2(2,0,3,1) + \lambda_3(0,2,1,0)$

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 2 + \lambda_3 \cdot 0 = 5 \\ \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 2 = -6 \\ \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 3 + \lambda_3 \cdot 1 = 4 \\ \lambda_1 \cdot (-1) + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot 0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 2 \Rightarrow (5,-6,4,1)$ es CL de A.
$\lambda_3 = -3$

10) puedo Armar $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$ y ver $|A|$

si $|A| = 0 \Rightarrow LD$

$|A| \neq 0 \Rightarrow LI$

otra forma manera

$$(0,0,0) = \lambda_1 (1,1,1) + \lambda_2 (0,1,1) + \lambda_3 (1,0,k)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 0\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 0\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + k\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ k\lambda_3 = 0 \end{array}$$

si $k = 0 \Rightarrow$ $\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3$

$\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_3 \Rightarrow$

Ej. $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = -1$

$\Rightarrow$ Al no haber implicado $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ los vectores son LD. Rango 2: $(0,1,1)$ y $(1,0,0)$ son LI

$k \neq 0 \quad \lambda_3 = 0 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_1 = 0 \Rightarrow$ LI

Rango 3.

11) Ec paramétrica; $r: (x,y,z) = (1,2,5) + \lambda (2,1,3)$

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 + 3\lambda \end{cases}$$

Ec Reducida o implícita:

despejo λ en c/u $\Rightarrow$ $\lambda = \frac{x-1}{2}$

$\lambda = y - 2$

$\lambda = \frac{z-5}{3}$

$\frac{x-1}{2} = y - 2 \qquad \frac{x-1}{2} = \frac{z-5}{3}$

$$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 3x - 2z + 7 = 0 \end{cases}$$

12) $P(1,1,1)$ $r\begin{cases} x+y+z+2=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$

Para un plano necesito 2 vectores directores (o el normal) y un punto.

1 vector director es el de la recta r
el otro lo encuentro restando un punto de la recta y el punto P.

Vector director de la recta:

$x=\lambda \Rightarrow$ $\lambda+y+z+2=0$

$\left.\begin{aligned} \lambda &= -2-y-z \\ \lambda &= y+z \end{aligned}\right\} \lambda=-1$

$\Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\alpha \\ z=\cancel{\alpha}-1-\cancel{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vector director

otro vector director: un punto en la recta:

$Q=(-1,0,-1)$

$P-Q=(-2,-1,-2) \Rightarrow$

$\pi = (1,1,1)+\lambda(0,1,-1)+\mu(-2,-1,-2)$

$\pi = \begin{cases} x=1-2\mu \\ y=1+\lambda-\mu \\ z=1-\lambda-2\mu \end{cases}$

$\pi = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -3x+2y+2z-1=0$

13) intersección r y π

$$r \begin{cases} x = \lambda+1 \\ y = 2\lambda+1 \\ z = 1+3\lambda \end{cases} \qquad \pi \begin{cases} x = 1+\alpha+\mu \\ y = 3\alpha+\mu \\ z = 2+\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad r \cap \pi = \begin{aligned} \lambda+1 &= 1+\alpha+\mu \\ 2\lambda+1 &= 3\alpha+\mu \\ 1+3\lambda &= 2+\alpha \end{aligned}$$

sistema 3 variables, resuelvo $\Rightarrow$ $\mu = -1/5$

$\alpha = 4/5$

$\lambda = 3/5$

$\Rightarrow$ meto λ en r

$x = 3/5 + 1 = \boxed{x = 8/5}$

$y = 2 \cdot \frac{3}{5} + 1 = \boxed{y = \frac{11}{5}}$

$z = 1 + 3\,\frac{3}{5} = \boxed{z = 14/5}$

$$r \cap \pi = \left(\frac{8}{5}, \frac{11}{5}, \frac{14}{5} \right)$$

13) a) $\vec{u} = (2,1,3) \quad \vec{v} = (1,0,3)$

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 11$

b) $\| \vec{u} \| = \sqrt{2^2+1^2+3^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$

c) $\| \vec{v} \| = \sqrt{1^2+0^2+3^2} = \sqrt{10}$

d) $\| \vec{u} \times \vec{v} \| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \| 3\hat{i} - 3\hat{j} - 1\hat{k} \|$

$\| (3,-3,-1) \|$

$$= \sqrt{3^2+(-3)^2+(-1)^2} = \sqrt{9+9+1} = \sqrt{19}$$

angulo u y v

$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos\theta$

$11 = \sqrt{14}\sqrt{10} \cos\theta$

$\cos\theta = \frac{11}{\sqrt{140}} \Rightarrow \operatorname{Arccos}\left(\frac{11}{\sqrt{140}}\right) = \theta$

14) Probar $r \perp R$

necesito el vector director de r y de R, después probar $\langle \bar{v}_r, \bar{v}_R \rangle = 0$

$\bar{v}_r = x = \lambda \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda + y + 2z + 5 = 0 \\ 2\lambda - 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y + 2z = -2\lambda - 5 \\ -2y - z = -2\lambda - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} z = -2\lambda - 4 \\ y = 2\lambda + 3 \end{matrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ +2 \\ -2 \end{pmatrix}$

otra forma de hacerlo: $r \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0 \\ 2x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$

Vector ~~director~~ normal del plano $2x + y + 2z + 5 = 0$

$\check{n}_1 = (2, 1, 2)$

Vector normal del plano $2x - 2y - z + 2 = 0$

$\check{n}_2 = (2, -2, -1)$ $\quad r = \check{n}_2 \times \check{n}_1$

el vector director de la recta $\begin{matrix} r \perp \check{n}_2 \\ r \perp \check{n}_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (3, 6, -6)$

notar $\begin{pmatrix}3\\6\\-6\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ son el mismo vector

$\bar{V}_R$: $x+y-3z-1=0 \rightarrow n_1=(1,1,-3)$
$2x-y-9z-2=0 \quad n_2=(2,-1,-9)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -9 \end{vmatrix} = (-12, 3, -3) = (-4, 1, -1)$$

$\Rightarrow \langle \bar{V}_r, \bar{V}_R \rangle = (1,2,-2)\cdot(-4,1,-1) = -4+2+2 = \underline{\underline{0}}$

b) $p=(1,2,3) \quad \perp \; 2x+y=0$
$\quad \hookrightarrow n=(2,1,0)$

$\Rightarrow$ Vector director de la recta $(2,1,0)$

Paramétrica:

$\Rightarrow \begin{cases} x = 2\lambda+1 \\ y = 1\lambda+2 \\ z = 3 \end{cases}$

ec implícita:

$\frac{x-1}{2} = \lambda$

$y-2 = \lambda$

$z=3$

$\begin{cases} x-2y+1=0 \\ z=3 \end{cases}$

15)

$\alpha(-1,1,1) + \beta(1,2,3) = (-\alpha+\beta, \alpha+2\beta, \alpha+3\beta)$

16) $S = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x-y=0 \right\}$

•) $S \neq \phi$ ej $(2,2,0) \in S$

•) Suma es cerrada $\begin{pmatrix}x\\+x\\z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x'\\+x'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+x'\\+(x+x')\\z+z'\end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$ misma forma

$(x+x') \cancel{+} (+(x+x')) = 0$

$\hookrightarrow$ cumple! $\in S$

⊙ multip por escalar es cerrada:

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ +x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ +\lambda x \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \lambda x - \lambda x = 0 \rightarrow \in S$$

son LI

base $\begin{pmatrix} x \\ +x \\ \cancel{z} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ dim 2

17) $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad x+3y+2z=0 \right\}$

$S \neq \phi$ ej $(2,0,-1) \in S$

• Suma:

$x + 3y + 2z = 0 \qquad x' + 3y' + 2z' = 0$

$(x+x') + 3(y+y') + 2(z+z') \overset{?}{=} 0$

$\underbrace{x + 3y + 2z}_{0} + \underbrace{x' + 3y' + 2z'}_{0} = 0 \Rightarrow$ cerrado

• Producto $\lambda x + 3\lambda y + 2\lambda z \overset{?}{=} 0$

$\lambda(\underbrace{x + 3y + 2z}_{0}) = 0 \Rightarrow$ cerrado

$\Rightarrow$ subespacio $\mathbb{R}^3$