

PRÁCTICO 2: MÁXIMO COMÚN DIVISOR, ALGORITMO DE EUCLIDES E IDENTIDAD DE BEZOUT.

Ejercicio 1.

- Hallar los divisores positivos de 21 y de 30.
- Hallar los divisores positivos comunes de 21 y 30.
- Usando lo anterior, calcular el máximo común divisor de 21 y 30.

Ejercicio 2. [Algoritmo de Euclides]. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$.

- Describir el Algoritmo de Euclides para calcular el $\text{mcd}(a, b)$.
- Usar el Algoritmo de Euclides para calcular el $\text{mcd}(a, b)$ en los siguientes casos:
 - $a = 63, b = 15$.
 - $a = 455, b = 1235$.
 - $a = 2366, b = 273$.

Ejercicio 3. [Lema de Euclides]. Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$, tales que $\text{mcd}(a, b) = 1$ (a y b son primos entre sí). Probar o dar un contraejemplo de las siguientes afirmaciones.

- Si $a|(bc)$ entonces $a|c$.
- Si $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$.
- ¿Valen las partes anteriores si $\text{mcd}(a, b) > 1$?

Ejercicio 4. [Bezout] Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$. Probar las siguientes afirmaciones:

- $\text{mcd}(ca, cb) = c \text{mcd}(a, b)$. Sugerencia: usar Bezout y probar la doble desigualdad.
- Si $c|a$ y $c|b$ entonces: $\text{mcd}(a/c, b/c) = \text{mcd}(a, b)/c$.
- Si a y b son primos entre sí, entonces: $\text{mcd}(a - b, a + b) = 1$ o 2 . Sugerencia: probar primero que $\text{mcd}(a - b, a + b)$ divide a $\text{mcd}(2a, 2b)$.

Ejercicio 5. Para este ejercicio será útil la siguiente propiedad: si $d|a$ y $d|b$, entonces $d|(ax+by), \forall x, y \in \mathbb{Z}$.

- Se define la sucesión de Fibonacci como $F_0 = 0, F_1 = 1$ y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Demostrar que dos términos consecutivos cualesquiera de la sucesión de Fibonacci son coprimos.
- Demostrar que $\text{mcd}(7k + 3, 12k + 5) = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$.
- Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, tales que $(ad - bc)|a$ y $(ad - bc)|c$. Probar que: $\text{mcd}(an + b, cn + d) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Sugerencia: hallar una combinación entera de $an + b$ y $cn + d$ que valga $ad - bc$. Luego adaptarla para que valga 1.

Ejercicio 6. [Cofactores.] Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos.

- Probar que $d = \text{mcd}(a, b)$, si y sólo si, existen $a^*, b^* \in \mathbb{Z}$, coprimos, tales que: $a = da^*$ y $b = db^*$. Los enteros a^* y b^* se denominan cofactores de a y b . Sugerencia: usar Bezout.

b. Hallar los cofactores de $a = 63$ y $b = 15$.

c. Probar que si a es par y b impar entonces: $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(a/2, b)$. Sugerencia: usar cofactores.

Ejercicio 7. En cada caso, hallar $a, b \in \mathbb{N}$ que verifiquen las condiciones dadas.

a. $ab = 22275$ y $\text{mcd}(a, b) = 15$. Sugerencia: usar cofactores y factorizar en producto de primos.

b. $ab = 1008$ y $\text{mcm}(a, b) = 168$. Recordar que: $\text{mcm}(a, b) \cdot \text{mcd}(a, b) = |a||b|$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$.

c. $a + b = 1271$ y $\text{mcm}(a, b) = 330 \cdot \text{mcd}(a, b)$.

d. $a + b = 122$ y $\text{mcd}(a, b) + \text{mcm}(a, b) = 1802$.

Ejercicio 8. Hallar $\text{mcd}(a, b)$ sabiendo que $\text{mcd}(a, b) \cdot \text{mcm}(a, b) = 48$ y $a^2 = b^2 + 28$.