

Matemática Discreta 1

Práctico 1: Combinatoria I

Temas: Regla del producto, permutaciones, arreglos y combinaciones sin repetición.

Ejercicio 1. Un alfabeto consta de 5 vocales y 22 consonantes. ¿Cuántas palabras de longitud 6 se pueden formar con tal alfabeto que no tengan ni dos consonantes ni dos vocales juntas?

Ejercicio 2. La final de un campeonato de fútbol ha terminado en empate y debe definirse por penales. Para patearlos, la directora técnica debe elegir en orden 5 jugadoras diferentes de un total de 11.

1. ¿De cuántas formas puede hacerlo?
2. Responder la misma pregunta si la capitana del equipo siempre patea el quinto penal.

Ejercicio 3.

1. ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar usando todas las letras de la palabra ÁRBOL?
2. ¿Cuántas palabras de largo 3 se pueden formar usando letras distintas de la palabra ÁRBOL?
3. ¿Cuántas palabras distintas pueden obtenerse permutando las letras de la palabra ALGORITMO?

Ejercicio 4.

1. ¿De cuántas formas se puede colorear una bandera de cuatro franjas horizontales con cinco colores de forma que franjas contiguas no tengan el mismo color?
2. Idem a la parte anterior con la restricción de que el color de la primera y última franja sean distintos.

Ejercicio 5. ¿Cuántos números naturales pares de tres cifras, con todos sus dígitos distintos, existen?

Ejercicio 6. Un comité de 12 personas debe elegir de entre sus miembros un presidente, un secretario y un tesorero. ¿De cuántas formas puede hacerse esto?

Ejercicio 7. Un comité de 10 personas será elegido entre 8 hombres y 8 mujeres. ¿De cuántas formas se puede hacer una selección si:

1. No hay restricciones.
2. Debe haber 5 hombres y 5 mujeres.
3. Debe haber más mujeres que hombres.
4. Debe haber al menos 7 hombres.

Ejercicio 8. En una playa se juntan 13 chicos y deciden hacer 4 equipos para jugar al voleibol: tres equipos de 3 jugadores y uno de 4. Entre los chicos se encuentra uno sumamente habilidoso y otro muy poco habilidoso. Los restantes 11 jugadores son de nivel medio.

Para equiparar, al habilidoso lo colocan en uno de los equipos de 3 jugadores y al poco habilidoso en el equipo de 4 jugadores.

¿De cuántas formas se pueden armar los equipos?

Ejercicio 9. En una prueba que consta de 10 preguntas un estudiante decide responder sólo 6, y quiere que al menos 3 de ellas estén entre las 5 primeras. ¿De cuántas formas distintas podría hacerlo?

Ejercicio 10. Para una selección de fútbol, fueron convocados 2 goleros, 6 zagueros, 7 mediocampistas y 4 atacantes.

¿De cuántos modos es posible formar una selección con:

1. 1 golero,
2. 4 zagueros,
3. 4 mediocampistas,
4. 2 atacantes?

Ejercicio 11. ¿De cuántas formas puede un jugador extraer 5 cartas de una baraja común (de 48 cartas) y obtener:

1. cinco cartas del mismo palo,
2. cuatro ases,
3. cuatro cartas del mismo valor,
4. tres ases y dos sotas,
5. tres ases y un par?

Ejercicio 12.

1. Hallar la cantidad de subconjuntos de un conjunto con n elementos razonando con la fórmula del binomio.
2. Probar que

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} = 0.$$

3. Hallar el valor de la siguiente suma:

$$\sum_{k=0}^{203} \binom{203}{k} (-4)^k.$$

Ejercicio 13. Considerar la suma

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{m}.$$

1. Calcular la suma para algunos casos usando el triángulo de Pascal.
Aclaración: si $i < m$ asumimos $\binom{i}{m} = 0$.
2. Conjeturar cuánto suma en general y demostrarlo por inducción completa.

Ejercicio 14. Usando que $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$, probar que

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Algunas aclaraciones

1. Para pensar el ejercicio 3(c) como un ejercicio de combinaciones, considere primero las posibilidades para colocar las dos letras O, luego vea la cantidad de formas de acomodar el resto de las letras.
2. En el ejercicio 4 hay una primera, segunda, tercera y cuarta franja. En el conteo importa de qué color está pintada cada franja.
3. En el ejercicio 7 las personas son distinguidas.
4. En el ejercicio 11 cada una de las 48 cartas tiene asociado un valor (del 1 al 12) y un palo (oro, basto, espada o copa). Las cartas con valor 1 se llaman ases y las de valor 10 se llaman sotas. Un par consiste en dos cartas con el mismo valor.