Transformada Z

Modulación y Procesamiento de Señales
Ernesto López, Mauricio Ramos
{elopez, mramos}@fing.edu.uy

Centro Universitario Regional Este
Sede Rocha
Tecnólogo en Telecomunicaciones

Curso 2014

La transformada Z

Introducción

- Se vio que la transformada de Fourier es importante para la representación y el análisis de señales y sistemas en tiempo discreto.
- Con la transformada Z también se obtiene una representación de una secuencia, y las propiedades de la secuencia están vinculadas a las propiedades de su transformada Z.
- La transformada Z consiste en una generalización de la transformada de Fourier:
  - con la transformada de Fourier, una secuencia se descompone en una combinación lineal de exponenciales complejas (senos y cosenos) de amplitud constante.
  - la transformada Z descompone a una secuencia en una combinación lineal en senos y cosenos de amplitud exponencial.

Motivación

- No todas las secuencias tienen transformada de Fourier. La transformada Z se aplica a un conjunto mas amplio de secuencias.
- En muchos casos, la transformada Z brinda una notación mas conveniente que facilita el análisis y la manipulación de secuencias y sistemas.

Definición e interpretación

Definición

Transformada Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Transformada de Fourier

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- La transformada Z puede considerarse como un operador $\mathcal{Z}\{\cdot\}$ que transforma una secuencia en una función $X(z)$,

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = X(z)$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{Z}\{\cdot\}} \longrightarrow X(z)$$

  - La función $X(z)$ es una función compleja de variable z compleja,

$$X : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

  - La correspondencia entre una secuencia y su transformada Z se indica con la siguiente notación:

$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z).$$

Definición e interpretación

Interpretación

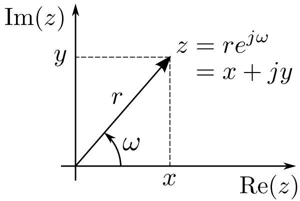
- Como la transformada Z es una función de variable compleja, es conveniente describirla e interpretarla en el plano complejo.
  - A cada punto z del plano complejo le asigna un valor complejo $X(z)$.
  - Equivalentemente, a cada punto del plano complejo le corresponden dos valores reales, la magnitud y la fase de $X(z)$.
- A su vez, la variable compleja z también puede representarse mediante dos números reales en módulo y fase o parte real y parte imaginaria:

Coordenadas polares

$$z = re^{j\omega}$$

Coordenadas rectangulares

$$z = x + jy$$



Definición e interpretación

Ejemplo

- Considérese una secuencia $x[n]$ cuya transformada Z es

$$X(z) = \frac{z}{z-a}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

- Expresión en coordenadas polares:
  - Se sustituye z por
  $$z = re^{j\omega}.$$
  - Queda una función compleja de dos variables reales,
  $$\begin{aligned} X(r,\omega) &= \frac{re^{j\omega}}{re^{j\omega}-a} \\ &= \frac{r\cos\omega + jr\sin\omega}{r\cos\omega - a + jr\sin\omega} \end{aligned}$$
  - que puede expresarse en magnitud y fase como

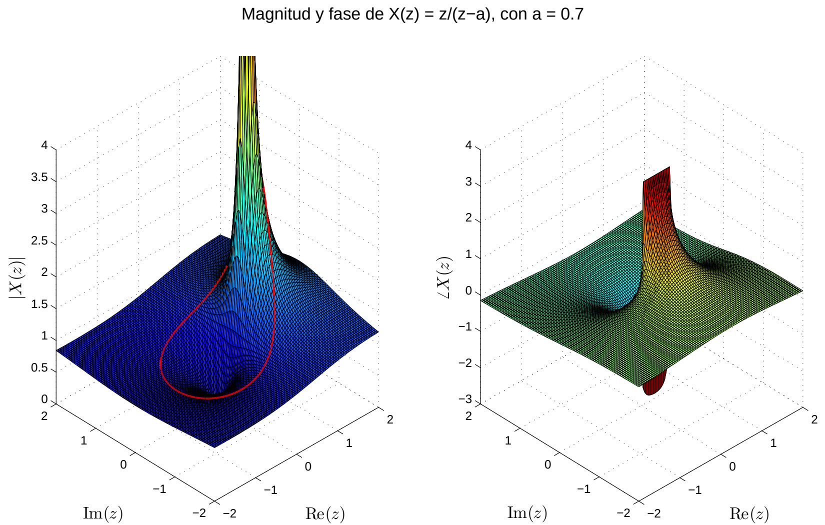
$$|X(r,\omega)| = \frac{r}{\sqrt{r^2+a^2-2a\cos\omega}}, \qquad \angle X(r,\omega) = \omega - \arctan\left(\frac{r\sin\omega}{r\cos\omega - a}\right)$$

Definición e interpretación

Ejemplo

- Expresión en coordenadas rectangulares:
  - Se sustituye z por
  $$z = x + jy.$$
  - Queda una función compleja de dos variables reales,
  $$X(x, y) = \frac{x + jy}{x - a + jy}$$
  - que puede expresarse en magnitud y fase como
  $$|X(x, y)| = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{(x - a)^2 + y^2}}, \qquad \angle X(x, y) = \arctan\frac{y}{x} - \arctan\frac{y}{x - a}$$
- Observación:
$$X(z) = \frac{z}{z - a} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ll} X(0) = 0 & \text{(cero en 0)} \\ X(a) = \infty & \text{(polo en } a\text{)} \end{array}$$
- Los puntos del plano complejo donde $X(z)$ vale cero se llaman ceros de $X(z)$ y los puntos donde vale infinito se llaman polos de $X(z)$.

Definición e interpretación



Definición e interpretación

Interpretación

- $X(z)$ puede considerarse como dos funciones reales, $|X(z)|$ y $\angle X(z)$, de una variable compleja z.
- Cada una de las funciones puede representarse gráficamente como una superficie, donde a cada valor del plano complejo se le asigna un valor real.

Definición e interpretación

Vínculo con la Transformada de Fourier

Transformada Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Transformada de Fourier

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- Si se reemplaza la variable z por $e^{j\omega}$ en la transformada Z, ésta se reduce a la transformada de Fourier.
- En otras palabras, la transformada de Fourier es la transformada Z evaluada en $z = e^{j\omega}$,

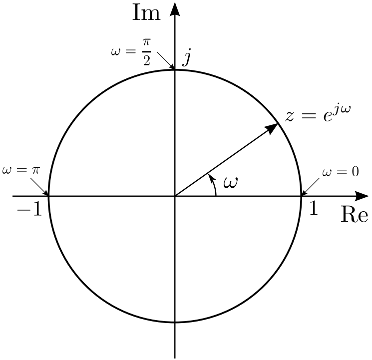
$$X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}).$$

- Este es el motivo de emplear la notación $X(e^{j\omega})$ en lugar de $X(\omega)$ para la transformada de Fourier.
- Evaluar en $z = e^{j\omega}$ equivale a restringir a z a tener magnitud unitaria, es decir, $|z| = 1$.

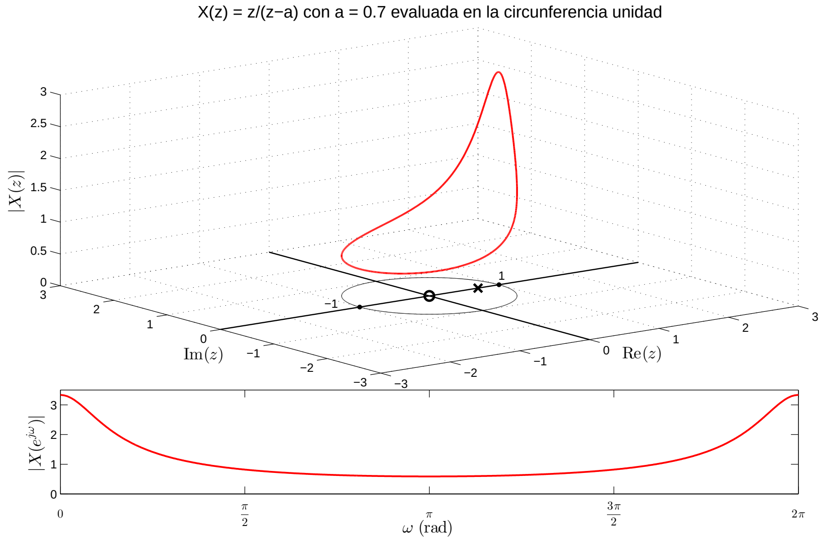
Definición e interpretación

Vínculo con la Transformada de Fourier

- En el plano complejo, $z = e^{j\omega}$ determina una circunferencia centrada en el origen de radio uno al variar ω. Esta circunferencia se llama circunferencia unidad.
- Por lo tanto, la transformada de Fourier es la transformada Z evaluada en la circunferencia unidad.
  - ω es el ángulo entre el vector definido por un punto en la circunferencia unidad y el eje real.
  - Evaluando $X(z)$ en puntos en la circunferencia unidad comenzando en $z = 1$ $(\omega = 0)$ hasta $z = -1$ $(\omega = \pi)$ pasando por $z = j$ $(\omega = \pi/2)$ se obtiene la transformada de Fourier en $0 \leq \omega \leq \pi$.
  - Un cambio de 2π radianes del ángulo corresponde a dar una vuelta entera en la circunferencia para volver al mismo punto, acorde con la periodicidad de la transformada de Fourier.



Definición e interpretación



La transformada de Fourier con el eje de frecuencia lineal envuelto en el círculo unidad con $\omega = 0$ en $z = 1$ y $\omega = \pi$ en $z = -1$ coincide con la transformada Z evaluada en el círculo unidad.

Definición e interpretación

- Expresando z en notación polar,

$$z = re^{j\omega},$$

la transformada Z se puede escribir como,

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n}.$$

- Observando que

$$(re^{j\omega})^{-n} = r^{-n}e^{-j\omega n} = r^{-n}(\cos(\omega n) - j\sin(\omega n))$$

la transformada Z queda

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}(\cos(\omega n) - j\sin(\omega n))$$

- Por lo tanto, la parte real y la parte imaginaria de la transformada Z en el punto del plano complejo $z = re^{j\omega}$ se calculan respectivamente como

$$\mathrm{Re}(X(re^{j\omega})) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}\cos(\omega n)$$

$$\mathrm{Im}(X(re^{j\omega})) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}\sin(\omega n).$$

Definición e interpretación

Para calcular la transformada Z de una secuencia $x[n]$ en cierto punto del plano complejo $z = re^{j\omega}$, se puede hacer lo siguiente:

- Se construye una secuencia de prueba $p[n]$ que consiste en un coseno con envolvente exponencial,

$$p[n] = r^{-n}\cos(\omega n)$$

  - la base de la exponencial es r, el módulo de z.
  - la frecuencia de la sinusoide es ω, la fase z
- Se multiplica la secuencia $x[n]$ con la secuencia de prueba $p[n]$.
- Se suman todas las muestras del producto, y se obtiene la parte real de la transformada Z.
- Se arma la secuencia de prueba con un seno en lugar de un coseno y se hace lo análogo para obtener la parte imaginaria.

Definición e interpretación

Ejemplo: funciones de prueba

- Se consideran los puntos del plano complejo z_1, z_2 y z_3 con

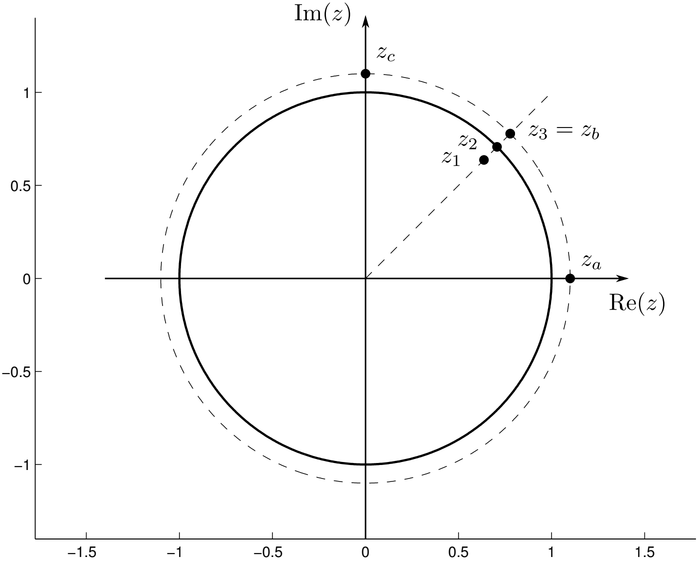
$$\angle z_1 = \angle z_2 = \angle z_3 = \frac{\pi}{4} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} |z_1| &= 0.9 \\ |z_2| &= 1 \\ |z_3| &= 1.1 \end{aligned}$$

- También se consideran los puntos del plano complejo z_a, z_b y z_c con

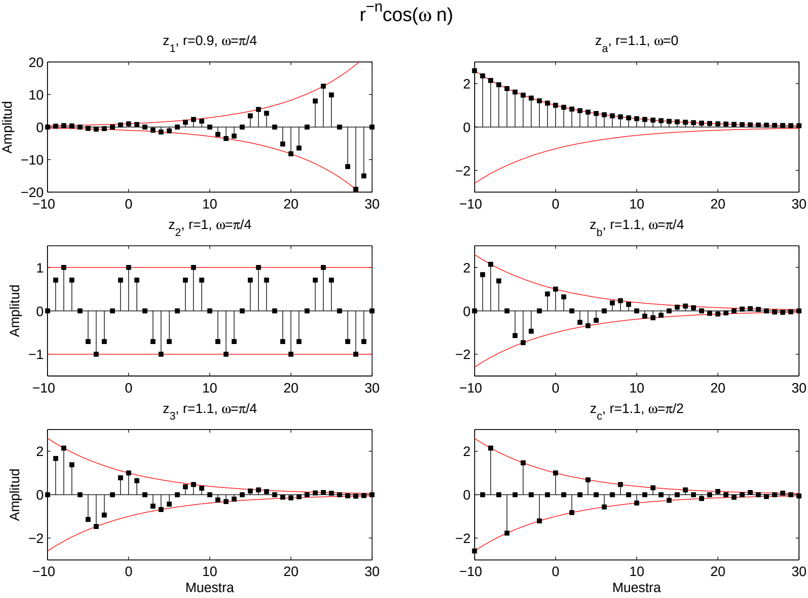
$$|z_a| = |z_b| = |z_c| = 1.1 \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \angle z_a &= 0 \\ \angle z_b &= \pi/4 \\ \angle z_c &= \pi/2 \end{aligned}$$

- En cada caso se construyen las funciones de prueba
  - las funciones de prueba creadas a partir de z_1, z_2 y z_3 tienen todas la misma frecuencia $\omega = \pi/2$ radianes pero envolventes exponenciales de distinta velocidad de crecimiento.
  - las funciones de prueba creadas a partir de z_a, z_b y z_c tienen todas la misma envolvente $(1.1)^{-n}$ pero distinta frecuencia.

Definición e interpretación



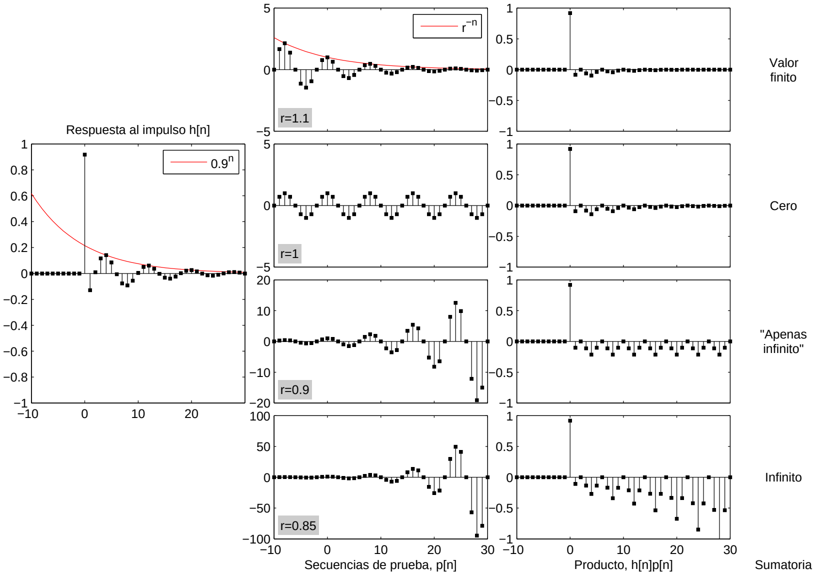
Definición e interpretación



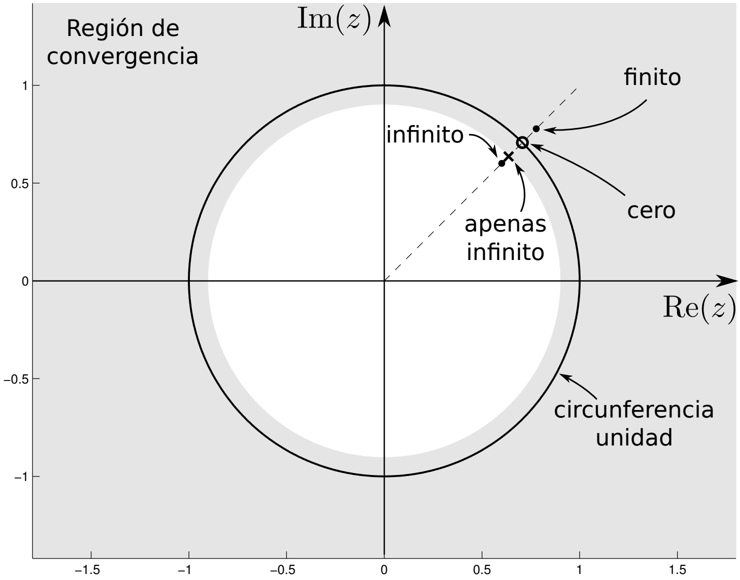
Ejemplo: funciones de prueba (cont.)

- Se considera ahora la respuesta al impulso $h[n]$ de un sistema causal.
  - Es una secuencia hacia adelante: vale 0 en todo $n < 0$.
  - En este caso, $h[n]$ es una sinusoide con envolvente exponencial decreciente (luego del transitorio).
- Se calcula la transformada Z en algunos puntos del plano complejo empleando funciones de prueba.
- Las funciones de prueba $p[n]$ tienen envolvente exponencial.
  - En el caso en que $p[n]$ crezca mas lentamente que el decrecimiento de $h[n]$, la transformada Z converge en el punto del plano z asociado a la función de prueba $p[n]$.
  - En caso contrario, a transformada Z diverge en el punto del plano z.

Definición e interpretación



Definición e interpretación



Definición e interpretación

Observaciones

- La transformada Z de una secuencia toma valores finitos, cero o infinito en distintos lugares del plano complejo.
- En los puntos denominados como "apenas infinito", la transformada Z no converge, pero indican el límite de la convergencia.
  - En el ejemplo, en los puntos del plano con módulo infinitesimalmente mayor, hay convergencia. En los puntos del plano con módulo inferior, no hay convergencia.
- El conjunto de puntos del plano complejo donde la transformada Z converge se llama región de convergencia (*ROC*).
- Los puntos de interés de la transformada Z son aquellos donde vale cero y "apenas infinito", es decir, los ceros y polos de la transformada Z.
- Un sistema queda especificado por la posición de los ceros y de los polos de la transformada Z de su respuesta al impulso.
  - Los ceros y polos se representan mediante un diagrama de polos y ceros.

Convergencia de la transformada Z

Transformada Z

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n},\quad z\in\mathbb{C}$$

Con $z=re^{j\omega}$

$$X(re^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n](re^{j\omega})^{-n}$$

- Con z expresado en notación polar, la transformada Z queda

$$X(re^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(x[n]r^{-n})e^{-j\omega n}$$

La ecuación indica que la transformada Z es la transformada de Fourier de la secuencia original $x[n]$ multiplicada por la secuencia r^{-n}.

- Se vio previamente que la transformada de Fourier converge a una función continua de ω si la secuencia es absolutamente sumable.
- Aplicando este criterio a la ecuación anterior, se obtiene la condición de convergencia de la transformada Z,

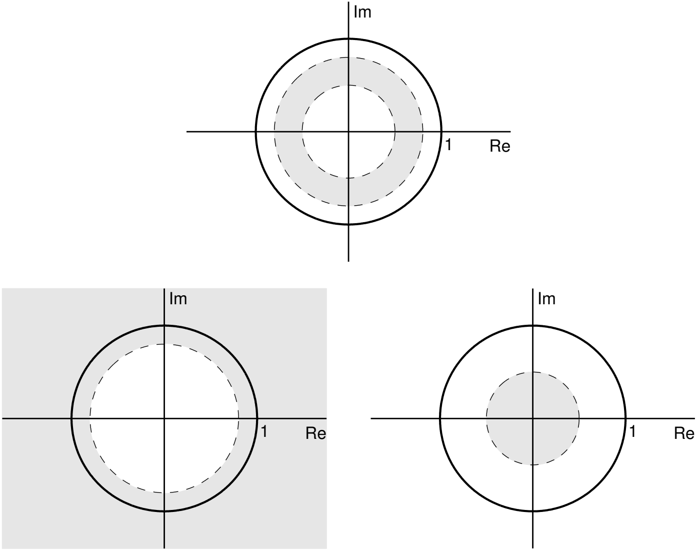
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]r^{-n}|<\infty$$

Convergencia de la transformada Z

- La convergencia de $X(z)$ depende solo de $|z|$.
  - Si se cumple que
    $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]||z|^{-n} < \infty,$$
    para cierto $z = z_1$, también se cumple para todo z definido en la circunferencia $|z| = |z_1|$.
  - Esto significa que si $z = z_1$ pertenece a la ROC, toda la circunferencia $|z| = |z_1|$ pertenece a la ROC.
- Como consecuencia de lo anterior, la ROC consiste en un anillo centrado en el origen
  - la frontera exterior es una circunferencia o la ROC se extiende al infinito.
  - la frontera interior también es un circunferencia o se extiende hasta el origen.
- Si la ROC incluye la circunferencia unidad, significa que la transformada Z converge en $z = e^{j\omega}$ $(|z| = 1)$, y por lo tanto, la transformada de Fourier converge.

Convergencia de la transformada Z

Ejemplos de regiones de convergencia en el plano complejo



Convergencia de la transformada Z

- Debido a la multiplicación de la secuencia $x[n]$ por la exponencial real r^{-n}, es posible que la transformada Z converja incluso si la transformada de Fourier no converge.

Convergencia de la transformada Z

Transformada Z de la secuencia escalón

- La secuencia $x[n] = u[n]$ no es absolutamente sumable, y por lo tanto su transformada de Fourier no converge.
- Sin embargo, $r^{-n}u[n]$ es absolutamente sumable si $r > 1$.
- Esto significa que la transformada Z del escalón existe en la región de convergencia $|z| > 1$.

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n \\
&\overset{(a)}{=} \begin{cases} \dfrac{1}{1 - z^{-1}}, & |z^{-1}| < 1 \\ \infty, & |z^{-1}| \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

(a) Serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^{M-1} r^n = \frac{1 - r^M}{1 - r}. \qquad (1)$$

En este caso

$$r = z^{-1} \quad \text{y} \quad M = \infty.$$

$$X(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{z - 1}, & |z| > 1 \\ \infty, & |z| \leq 1 \end{cases}$$

Transformadas Z racionales

- La transformada Z es útil cuando la sumatoria se puede expresar en forma cerrada, es decir, como una ecuación matemática simple en función de z.
- Transformadas de particular importancia y utilidad son aquellas que consisten en una función racional dentro de la ROC, es decir,

  $$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

  donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios en z.
- Observación: en ese caso, las raíces del numerador son los ceros de $X(z)$ y las raíces del denominador son los polos de $X(z)$.
- En el caso de transformadas racionales, existe un vínculo fuerte entre la ubicación de los polos de $X(z)$ y la ROC.
- Los sistemas recursivos definidos por ecuaciones en diferencias tienen respuesta al impulso cuya transformada Z es racional.
  - La transformada Z es especialmente útil para analizar, diseñar, calcular la respuesta al impulso de sistemas recursivos.

Ejemplos

Secuencia exponencial hacia adelante

- Se considera la secuencia hacia adelante $x[n] = a^n u[n]$.
- La transformada Z es,

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n]z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n
\end{aligned}
$$

- Para convergencia, se requiere que
$$\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty.$$
- La serie geométrica converge si
$$|az^{-1}| < 1$$
- o equivalentemente, si
$$|z| > |a| \quad \text{(ROC)}$$

- En la ROC, la transformada Z converge a (serie geométrica)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \qquad |z| > |a|$$

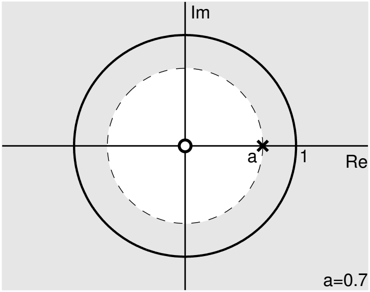
Ejemplos

Secuencia exponencial hacia adelante

$$x[n] = a^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{z}{z-a}, \qquad \text{ROC:} \quad |z| > |a| \qquad (2)$$

Ceros y Polos:

- En el caso de transformadas racionales, la transformada Z queda determinada (salvo una constante) por los polos y ceros.
- La transformada Z se puede representar mediante el diagrama de polos y ceros.
- La transformada Z tiene un cero en $z = 0$ y un polo en $z = a$.
- La frontera exterior de la ROC se extiende al infinito. Esto es consecuencia de tratarse de la transformada Z de una secuencia hacia adelante.



Ejemplos

Secuencia exponencial hacia adelante

Transformada de Fourier:

- La circunferencia unidad está incluida en la ROC si $|a| < 1$
  - Esto implica que la transformada de Fourier de $x[n]$ converge solo si $|a| < 1$.
- En el caso en que $|a| < 1$, la transformada de Fourier de la secuencia puede obtenerse evaluando $X(z)$ en $z = e^{j\omega}$,

$$X(e^{j\omega}) = \left.\frac{1}{1 - az^{-1}}\right|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - a\cos(-\omega) - ja\sin(-\omega)}$$

Transformada de Fourier

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a\cos\omega + ja\sin\omega}$$

Magnitud y fase

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a\cos(\omega) + a^2}}$$

$$\angle X(e^{j\omega}) = -\arctan\left(\frac{a\sin\omega}{1 - a\cos\omega}\right)$$

Ejemplos

Secuencia exponencial hacia adelante

Transformada de Fourier:

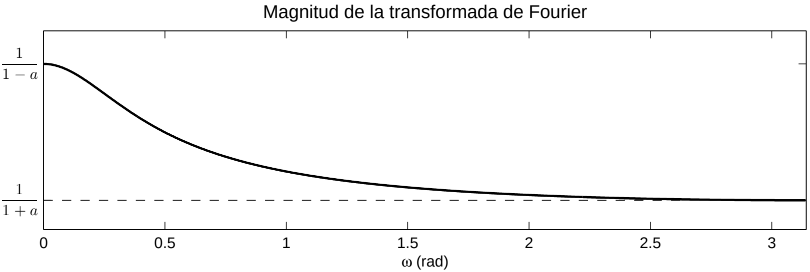
- Asumiendo que la secuencia es la respuesta al impulso de un sistema.

Ganancia en continua ($\omega = 0$):

$$|X(e^{j0})| = \frac{1}{\sqrt{1-2a+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-a)^2}} = \frac{1}{1-a}$$

Ganancia en la frecuencia de Nyquist ($\omega = \pi$):

$$|X(e^{j\pi})| = \frac{1}{\sqrt{1+2a+a^2}} = \frac{1}{1+a}$$



Ejemplos

Secuencia exponencial hacia adelante

Transformada de Fourier:

- Lo mismo se podría calcular con la transformada Z.
- $\omega = 0$ corresponde a $z = 1$ $(z = e^{j0} = 1)$.
  - Por lo tanto, la ganancia en continua es la transformada Z evaluada en 1,

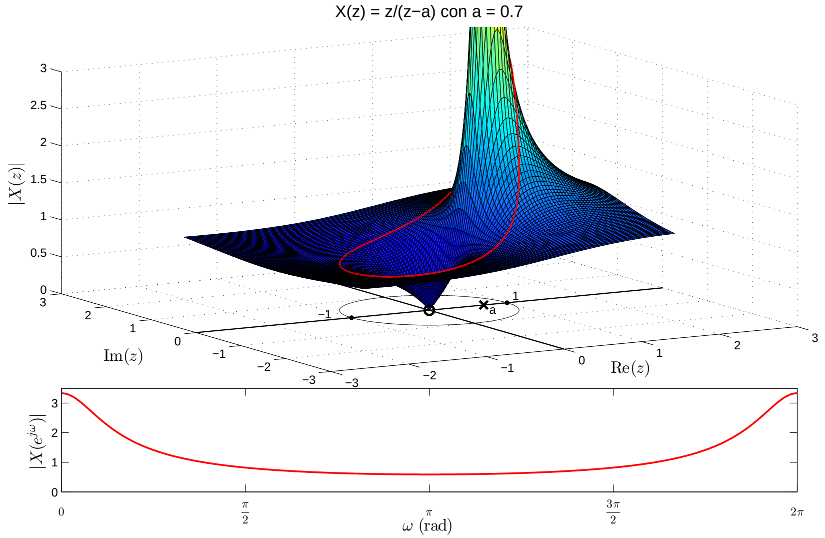
$$X(1) = \left.\frac{z}{z-a}\right|_{z=1} = \frac{1}{1-a}$$

- $\omega = \pi$ corresponde a $z = -1$ $(z = e^{j\pi} = -1)$.
  - Por lo tanto, la ganancia en la frecuencia de Nyquist es la transformada Z evaluada en -1,

$$X(-1) = \left.\frac{z}{z-a}\right|_{z=1} = \frac{-1}{-1-a} = \frac{1}{1+a}$$

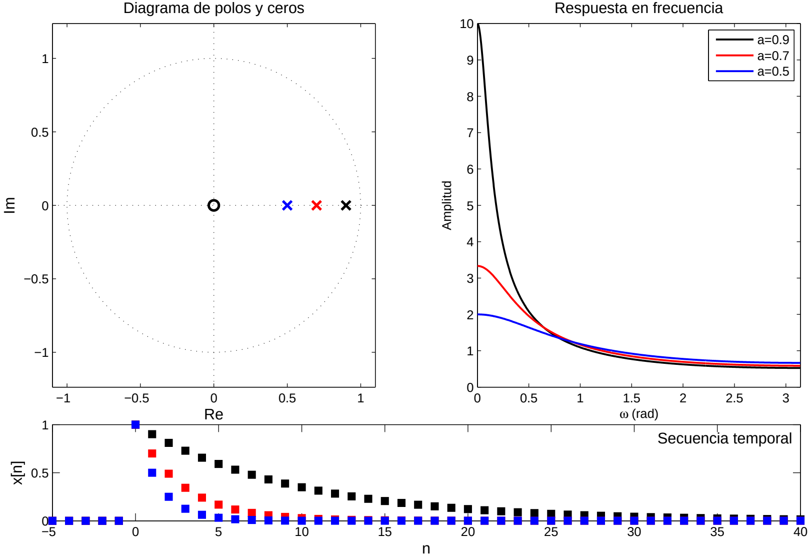
Ejemplos

Magnitud de la transformada Z y su evaluación en la circunferencia unidad



Ejemplos

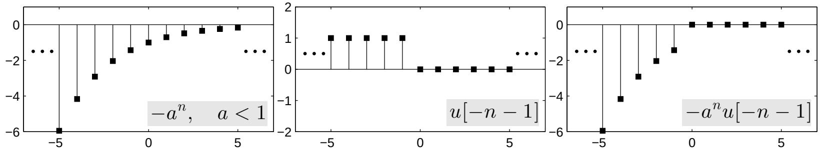
Análisis al variar el parámetro a



Ejemplos

Secuencia exponencial hacia atrás

- Se considera ahora la secuencia hacia atrás $x[n] = -a^n u[-n-1]$.



- La transformada Z es,

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$$

$$\overset{(a)}{=} -\sum_{m=1}^{\infty} a^{-m} z^m \overset{(b)}{=} 1 - \sum_{m=0}^{\infty} (a^{-1}z)^m$$

(a) Cambio de variable:

$$m = -n$$

(b) Se suma y se resta

$$(a^{-1}z)^0 = 1$$

- La sumatoria de la serie geométrica converge si

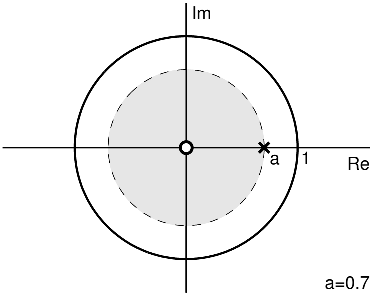
$$|a^{-1}z| < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad |z| < |a|$$

Ejemplos

Secuencia exponencial hacia atrás

- Empleando el resultado de la suma de una serie geométrica (ecuación 1) se tiene que en la región de convergencia,

$$
\begin{aligned}
X(z) &= 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} \\
&= \frac{-a^{-1}z}{1 - a^{-1}z} \\
&= \frac{z}{z-a}, \qquad |z| < |a|
\end{aligned}
$$



- Si $a < 1$, la secuencia crece exponencialmente con $n \to \infty$, por lo que no es absolutamente sumable y la transformada de Fourier no converge.
- La transformada Z coincide con la transformada del ejemplo anterior. Esto enfatiza la necesidad de especificar $X(z)$ y la ROC al indicar la transformada Z de una secuencia.

Ejemplos

Secuencia exponencial hacia atrás

- Para la exponencial real hacia atrás se obtuvo que

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{z}{z-a}, \qquad \text{ROC:} \quad |z| < |a| \tag{3}$$

- La frontera interior de la ROC se extiende hasta el origen. Esto es consecuencia de tratarse de una secuencia hacia atrás.

Ejemplos

Suma de dos secuencias exponenciales

- Se considera una señal que es la suma de dos exponenciales reales,

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

- La transformada Z es,

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \right\} z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} z^{-1}\right)^n
\end{aligned}$$

Ejemplos

Suma de dos secuencias exponenciales

- Convergencia
  - Para la convergencia de $X(z)$ se requiere que ambas sumas converjan, es decir, que

$$\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right| < 1 \quad \text{y} \quad \left|-\frac{1}{3}z^{-1}\right| < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad |z| > \left|\frac{1}{2}\right| \quad \text{y} \quad |z| > \left|\frac{1}{3}\right|$$

  - La ROC corresponde a la condición mas restrictiva, que es $|z| > \left|\frac{1}{2}\right|$.
  - Equivalentemente, la ROC es la intersección de las regiones de convergencia de cada sumatoria.
- Continuando con el cálculo de $X(z)$, en la ROC vale,

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

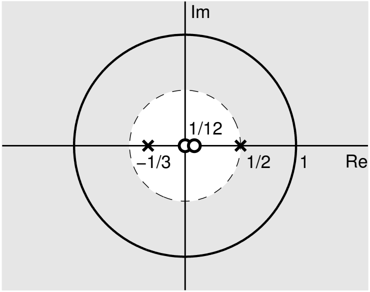
y operando se llega a que

$$X(z) = \frac{2z\left(z - \frac{1}{12}\right)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{3}\right)}, \qquad |z| > \left|\frac{1}{2}\right|$$

Ejemplos

Suma de dos secuencias exponenciales

- Diagrama de polos y ceros
  - Ceros: $z = 0$ y $z = \frac{1}{12}$
  - Polos: $z = \frac{1}{2}$ y $z = -\frac{1}{3}$
- Las secuencias son exponenciales reales decrecientes y la transformada de Fourier converge.



- Aplicación de la linealidad de la transformada Z
  - En este caso, $x[n]$ se compone de la suma de dos secuencias.
  - Se verá que la transformada Z es lineal.
  - Por lo tanto, $X(z)$ será la suma de la transformada de cada secuencia que compone $x[n]$.
  - Además, la ROC de $X(z)$ es la intersección de la ROC de cada secuencia que compone $x[n]$.

Ejemplos

Suma de dos secuencias aplicando linealidad

- Se vio que la transformada Z de una exponencial real hacia adelante es (ecuación 2)

$$a^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z-a}, \qquad \text{ROC:} \quad |z| > |a|$$

- Sea la secuencia

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

- Para calcular $X(z)$, se calcula primero la transformada de cada término de $x[n]$, que por tratarse de exponenciales reales hacia adelante son

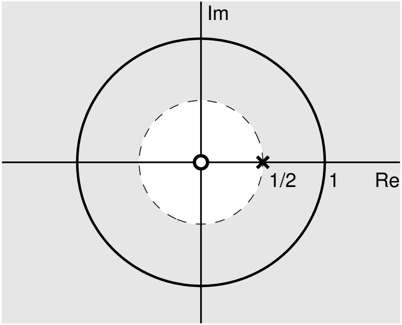
$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z-\frac{1}{2}}, \qquad |z| > \frac{1}{2}$$
$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z+\frac{1}{3}}, \qquad |z| > \frac{1}{3}$$

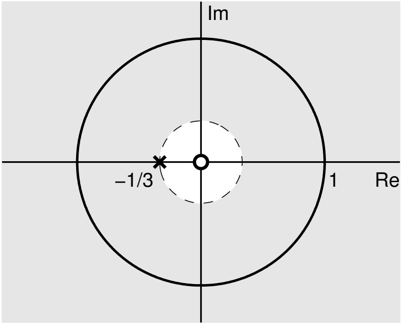
Ejemplos

Suma de dos secuencias aplicando linealidad

- Empleando la propiedad de linealidad de la transformada Z, se llega a que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{z}{z+\frac{1}{3}}, \quad |z| > \frac{1}{2} \qquad (4)$$





Ejemplos

Secuencia exponencial hacia ambos lados

- Sea considera la secuencia

$$x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

  - $x[n]$ es la suma de una secuencia exponencial real hacia adelante y otra hacia atrás.
  - La secuencia crece exponencialmente cuando $n \to -\infty$

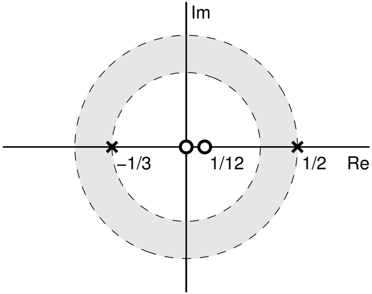
- Usando los resultados generales de la transformadas de las secuencias exponenciales reales (ecuaciones 2 y 3), se tiene que

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z}{z+\frac{1}{3}}, \qquad |z| > \frac{1}{3} \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z}{z-\frac{1}{2}}, \qquad |z| < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ejemplos

Secuencia exponencial hacia ambos lados

- Por linealidad de la transformada Z, $X(z)$ es la suma de las transformadas y la ROC es la intersección de las ROC.
- Por lo tanto, la ROC en este caso es el anillo $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$.



- Además, $X(z)$ en la región de convergencia es

$$X(z) = \frac{z}{z+\frac{1}{3}} + \frac{z}{z-\frac{1}{2}}, \qquad \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$$

o de forma equivalente

$$X(z) = \frac{2z\left(z-\frac{1}{12}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)}, \qquad \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$$

Ejemplos

Secuencia exponencial hacia ambos lados

Observaciones:

- La expresión analítica de la transformada Z es idéntica a la del ejemplo anterior (ecuación 4), pero la ROC es distinta.
- La ROC no contiene a la circunferencia unidad, y por lo tanto, la transformada de Fourier no converge. Esto es acorde al hecho de que se trata de una exponencial creciente cuando $n \to -\infty$.
- El hecho de que la ROC sea un anillo es consecuencia de que la señal es hacia ambos lados.

Observaciones generales

- La transformada Z de las secuencias en todos los ejemplos anteriores es una función racional, es decir, un cociente de polinomios.
- El resultado es general: la transformada Z de secuencias que consisten en una combinación lineal de secuencias exponenciales es un cociente de polinomios.

Secuencias de duración finita

- Para secuencias de duración finita, la transformada Z también es una función racional:
  - Si una secuencia es no nula en el intervalo $N_1 \leq n \leq N_2$, la transformada Z es

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n}$$

  - Por ejemplo,

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-5] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = 1 + z^{-5}$$

- La ROC es todo el plano complejo excepto tal vez $z = 0$ o $z = \infty$.

Propiedades de la región de convergencia

1. La ROC es un anillo o un disco centrado en el origen, es decir,

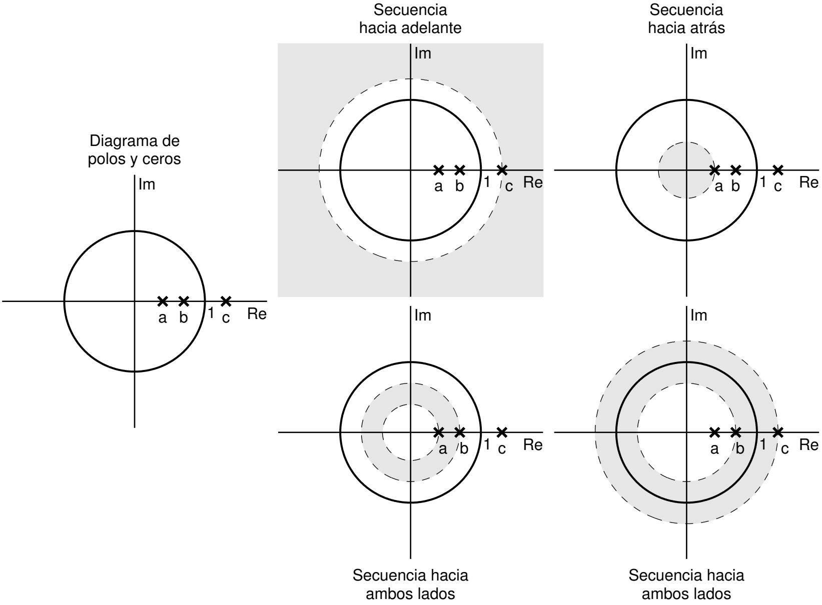
$$0 \leq r_R \leq |z| \leq r_L \leq \infty.$$

2. La transformada de Fourier converge absolutamente si y solo si la ROC incluye la circunferencia unidad.
3. La ROC no puede contener ningún polo.
4. Si $x[n]$ es una secuencia de duración finita la ROC es todo el plano complejo excepto tal vez $z = 0$ o $z = \infty$.
5. Si $x[n]$ es una secuencia hacia adelante, la ROC se extiende desde el polo de mayor magnitud hasta infinito.
6. Si $x[n]$ es una secuencia hacia atrás, la ROC se extiende desde el polo de menor magnitud hasta el origen del plano complejo.
7. Si $x[n]$ es una secuencia hacia ambos lados, la ROC consiste en un anillo, cuyas fronteras interior y exterior están acotadas por polos.

Propiedades de la región de convergencia

- Se vio que secuencias distintas pueden conducir a funciones transformada Z idénticas que únicamente difieren en la ROC.
  - Funciones transformada Z iguales implican un diagrama de polos y ceros igual.
- Las propiedades de la ROC limitan las posibles ROC asignadas a cierto patrón de polos y ceros.

Propiedades de la región de convergencia



Propiedades de la región de convergencia

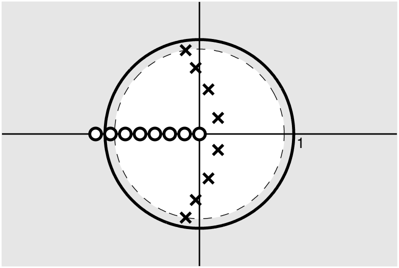
Causalidad y estabilidad de sistemas y vínculo con la ROC

Sea un sistema con respuesta al impulso $h[n]$ cuya transformada Z es $H(z)$.

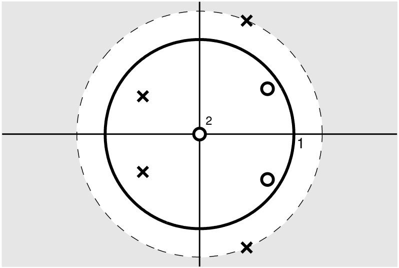
- Sistema causal:
  - Si el sistema causal, la respuesta al impulso cumple que $h[n] = 0$ para $n < 0$.
  - Esto significa que $h[n]$ es una secuencia hacia adelante.
  - La ROC de $H(z)$ abarca desde la circunferencia determinada por el polo de mayor magnitud hasta el infinito (propiedad 5).
- Sistema estable:
  - Si el sistema es estable, la respuesta al impulso $h[n]$ es absolutamente sumable.
  - Esto implica que existe la transformada de Fourier de $h[n]$ y por lo tanto, la circunferencia unidad está incluida en la ROC (propiedad 2).
  - La ROC de un sistema estable incluye la circunferencia unidad.
- Sistema causal y estable
  - Si el sistema es causal y estable, la ROC de $H(z)$ abarca desde la circunferencia definida por el polo de mayor magnitud hasta infinito (causalidad), e incluye el círculo unidad (estabilidad).
  - Como consecuencia, los polos de un sistema causal y estable están contenidos dentro del círculo unidad (todos tienen módulo menor que uno).

Propiedades de la región de convergencia

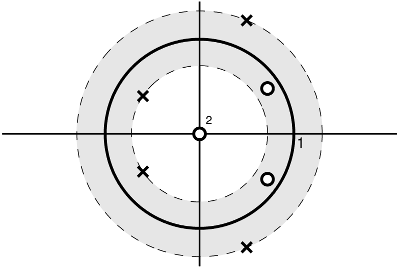
Causal y estable



Causal e inestable



No causal y estable



Inversión de la transformada Z

- Una aplicación de la transformada Z es en el análisis y diseño de sistemas en tiempo discreto.
  - Muchas veces el análisis implica calcular la transformada Z de secuencias, manipular la expresión matemática y encontrar la transformada inversa.
- La teoría de las funciones de variable compleja brinda métodos formales para invertir la transformada Z, por ejemplo, el teorema integral de Cauchy.
- Debido al tipo de secuencias y transformadas Z que se encuentran en el análisis de sistemas de tiempo discreto, son preferibles métodos menos formales.
  - Método de inspección
  - Descomposición en fracciones simples
  - Aplicación de las propiedades de la transformada Z

Inversión de la transformada Z

Método de inspección

- El método de inspección consiste en reconocer por inspección (es decir, mirando), ciertos pares de transformadas Z.

Ejemplo: transformada Z de primer orden

- Las secuencias exponenciales son muy frecuentes en la práctica, y se vio que

$$a^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}, \qquad |z| > |a|$$

- Si se necesita encontrar la transformada inversa de

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{2},$$

- por inspección es inmediato reconocer que la secuencia asociada es

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

Inversión de la transformada Z

Ejemplo: transformada Z de primer orden

- Si la región de convergencia asociada a $X(z)$ fuera $|z| < \frac{1}{2}$, la secuencia asociada, de acuerdo a la ecuación 3, sería

$$x[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1].$$

Método de inspección

- Para aplicar el método de inspección es necesario una tabla de transformadas Z de secuencias básicas.

Inversión de la transformada Z

Tabla de pares de transformadas

Secuencia, $x[n]$	Transformada Z, $X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	$\forall z$
$\delta[n-n_0]$	z^{-n_0}	$z \neq 0$ o $z \neq \infty$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\|z\| > 1$
$-nu[-n-1]$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\|z\| < 1$
$n^2 u[n]$	$\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$\|z\| > 1$
$-n^2 u[-n-1]$	$\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$\|z\| < 1$
$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{z^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$a^n \cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$
$a^n \sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$

Inversión de la transformada Z

- La transformada Z de la respuesta al impulso de un sistema de tiempo discreto es una función racional.
- Una función racional puede descomponerse como la suma de términos mas simples, y cada término simple es fácil de invertir, por ejemplo, por inspección recurriendo a una tabla de transformadas.

Descomposición en fracciones simples

- Se asume que $X(z)$ se puede expresar como un cociente de polinomios en z^{-1} de la siguiente forma:

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} \tag{5}$$

  - El numerador es de grado M en z^{-1}
  - El denominador es de grado N en z^{-1}

Inversión de la transformada Z

Descomposición en fracciones simples

- Multiplicando el numerador y el denominador por z^M y por z^N, se obtiene una expresión alternativa como cociente de polinomios en z

$$X(z) = \frac{z^N \sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}}{z^M \sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}} = \frac{z^N}{z^M} \frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \cdots + b_M}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N}$$

- Notar que:
  - Hay M ceros y N polos distintos de cero
  - Hay $M - N$ polos en cero si $M > N$ o $N - M$ ceros en cero si $N > M$.
- En cualquier caso, la ecuación 5 tiene la misma cantidad de polos y ceros.

Inversión de la transformada Z

Descomposición en fracciones simples

- El numerador y el denominador se pueden factorizar en monomios como

$$X(z) = \frac{z^N b_0 \prod_{k=0}^{M} (z - c_k)}{z^M a_0 \prod_{k=0}^{N} (z - d_k)} = \frac{b_0 \prod_{k=0}^{M} (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=0}^{N} (1 - d_k z^{-1})},$$

  donde c_k y d_k son las raíces no nulas del numerador y el denominador respectivamente.

- Si $M < N$ y los polos son de primer orden, $X(z)$ puede expresarse como,

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} \tag{6}$$

  - El denominador común es el mismo que el de la ecuación original.
  - Los valores A_k se pueden calcular sacando denominador común e igualando los coeficientes del polinomio obtenido con los del polinomio en el numerador de la función original.

Inversión de la transformada Z

Ejemplo: transformada Z de segundo orden

- Se considera la secuencia causal con transformada Z dada por

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}.$$

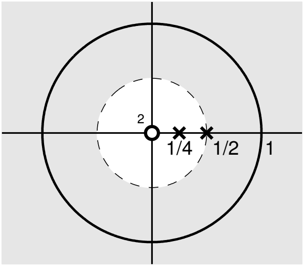
- Equivalentemente, $X(z)$ se puede expresar en polinomios en z como

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - \frac{3}{4}z^1 + \frac{1}{8}}$$

- Las raíces del denominador son $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z^2}{\left(z - \frac{1}{4}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} \end{aligned}$$

- Como la secuencia es hacia la derecha, la ROC es $|z| > \frac{1}{2}$.



Inversión de la transformada Z

Ejemplo: transformada Z de segundo orden

- Aplicando la descomposición en fracciones simples (ecuación 6), $X(z)$ se puede escribir como,

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

- Hay que calcular A_1 y A_2. Para eso, se saca denominador común,

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{A_1\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) + A_2\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} \\ &= \frac{A_1 + A_2 - \left(\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{4}A_2\right)z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} \end{aligned}$$

Notar que el numerador queda de primer grado $(N-1)$ en z^{-1}.

- Como el numerador de la función original es 1, se tiene que cumplir que

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} A_1 & + & A_2 & = & 1 \\ \frac{1}{2}A_1 & + & \frac{1}{4}A_2 & = & 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcr} A_1 & = & -1 \\ A_2 & = & 2 \end{array} \right.$$

Inversión de la transformada Z

Ejemplo: transformada Z de segundo orden

- Por lo tanto, $X(z)$ queda

$$X(z) = \frac{-1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

- Por inspección y usando la propiedad de linealidad de la transformada Z, se reconoce que la secuencia es

$$x[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Inversión de la transformada Z

Descomposición en fracciones simples

- Se vió que $X(z)$ puede expresarse como

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}$$

- Método de la "tapadita" para el cálculo de los coeficientes A_k:
  - Multiplicando ambos lados de la ecuación por $(1 - d_k z^{-1})$ y evaluando en $z = d_k$ se tiene que A_k vale

$$A_k = (1 - d_k z^{-1}) X(z)\big|_{z=d_k}$$

Inversión de la transformada Z

Ejemplo: transformada Z de segundo orden (otra vez)

- En el ejemplo, se había llegado a que

$$X(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{A_1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

- Para calcular A_1:
  1. se multiplican ambos lados de la igualdad por $\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)$,

$$\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)X(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = A_1 + \frac{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)A_2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

  2. se evalúa en $z=\frac{1}{4}$, resultando en

$$\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)X(z)\Big|_{z=\frac{1}{4}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\Big|_{z=\frac{1}{4}} = A_1$$

Inversión de la transformada Z

Descomposición en fracciones simples

- Se vio como un cociente de polinomios puede descomponerse en fracciones simples si el grado del numerador es menor que el grado del denominador, es decir, si $M < N$.
- En el caso en que $M \geq N$, hay que sumar además un polinomio de grado $M - N$ en z^{-1} para hacer la descomposición,

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} \tag{7}$$

- De esta forma, al sacar denominador común, el grado del numerador del primer término de la ecuación anterior queda M, igual al grado del numerador de la transformada original.
- Para calcular los coeficientes A_k y B_r se procede igual que en el caso anterior
  - Se saca denominador común.
  - Se iguala el polinomio obtenido en el numerador con el polinomio del numerador en la transformada original.
  - Esto conduce a un sistema de $M + 1$ ecuaciones y $M + 1$ incógnitas.

Inversión de la transformada Z

Ejemplo: otra transformada Z de segundo orden

- Se considera la secuencia causal con transformada Z dada por

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}.$$

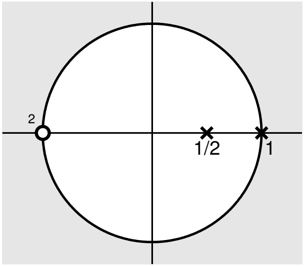
- Equivalentemente, $X(z)$ se puede expresar en polinomios en z como

$$X(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}}$$

- El numerador tiene raíz doble -1 y el denominador tiene raíces $\frac{1}{2}$ y 1, y por lo tanto

$$X(z) = \frac{(z+1)^2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z-1)} = \frac{(1+z^{-1})^2}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})}$$

- Como la secuencia es hacia la derecha, la ROC es $|z| > 1$.



Inversión de la transformada Z

Ejemplo: otra transformada Z de segundo orden

- En este caso $M = N = 2$ y no hay polos múltiples, por lo que para descomponer en fracciones simples hay que aplicar la ecuación 7,

$$X(z) = B_0 + \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - z^{-1}} \tag{8}$$

- Hay que calcular B_0, A_1 y A_2. Para eso, se saca denominador común,

$$X(z) = \frac{B_0\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right) + A_1\left(1 - z^{-1}\right) + A_2\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)}$$

- Operando e igualando el numerador con el numerador de la transformada original, se tiene que

$$(B_0+A_1+A_2)-\left(\frac{3}{2}B_0 + A_1 + \frac{1}{2}A_2\right)z^{-1}+\frac{1}{2}B_0z^{-2} = 1+2z^{-1}+z^{-2}$$

Inversión de la transformada Z

Ejemplo: transformada Z de segundo orden

- lo que conduce a un sistema de tres ecuaciones $(M+1)$ y tres incógnitas

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} B_0 & + & A_1 & + & A_2 & = & 1 \\ \frac{3}{2}B_0 & + & A_1 & + & \frac{1}{2}A_2 & = & -2 \\ \frac{1}{2}B_0 & & & & & = & 1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcr} B_0 & = & 2 \\ A_1 & = & -9 \\ A_2 & = & 8 \end{array}\right.$$

- Sustituyendo en la ecuación de la descomposición (ecuación 8), $X(z)$ queda

$$X(z) = 2 - \frac{9}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{8}{1-z^{-1}}, \qquad |z|>1$$

- Invirtiendo cada término, se obtiene la secuencia,

$$x[n] = 2\delta[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 8u[n].$$

Inversión de la transformada Z

Descomposición en fracciones simples

- En el caso en los polos son de primer orden
  - Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador en z^{-1}, es decir, $M < N$, $X(z)$ se puede expresar en la forma de la ecuación 6.
  - Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, es decir $M \geq N$, $X(z)$ se puede expresar en la forma de la ecuación 7.
- Si $X(z)$ tiene polos de multiplicidad mayor que 1, existe una expresión alternativa mas complicada para descomponer $X(z)$ en fracciones simples.
  - En muchas ocasiones es posible encontrar la antitransformada usando una tabla de antitransformadas combinada con la aplicación de propiedades de la transformada Z.

Inversión de la transformada Z

Secuencias de duración finita

- En el caso de secuencias de duración finita, $X(z)$ es una función racional pero solo tiene polos en $z = 0$.
- Para ver esto, considérese la secuencia $x[n]$ no nula en $-M_1 \leq n \leq M_2$.
- La secuencia puede expresarse a partir de impulsos como

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[k]\delta[n-k] \\ &= x[-M_1]\delta[n+M_1] + \cdots + x[-1]\delta[n+1] + x[0] + \\ &\qquad x[1]\delta[n-1] + \cdots + x[M_2]\delta[n-M_2] \end{aligned}$$

- Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{\delta[n-k]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-k]z^{-n} \\ &= z^{-k} \end{aligned} \tag{9}$$

Inversión de la transformada Z

Secuencias de duración finita

- Por la linealidad de la transformada Z, se tiene que

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[k]z^{-k} \\
&= x[-M_1]z^{M_1} + \cdots + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + \cdots + x[M_2]z^{-M_2} \\
&= \frac{x[-M_1]z^{M_1+M_2} + \cdots + x[-1]z^{M_2+1} + x[0]z^{M_2} + x[1]z^{M_2-1} + \cdots + x[M_2]}{z^{M_2}}
\end{aligned}$$

  - $X(z)$ tiene $M_1 + M_2$ ceros distintos de cero y M_2 polos en cero.
  - La ROC es todo el plano complejo excepto $z = 0$ y $z = \infty$.
- Si la secuencia fuera causal, es decir $M_1 = 0$,

$$X(z) = \frac{x[0]z^{M_2} + x[1]z^{M_2-1} + \cdots + x[M_2]}{z^{M_2}} \qquad \text{ROC: } \forall z,\ z \neq 0$$

- Si la secuencia fuera anticausal, es decir $M_2 = 0$,

$$X(z) = x[-M_1]z^{M_1} + \cdots + x[-1]z + x[0] \qquad \text{ROC: } \forall z,\ z < \infty$$

Inversión de la transformada Z

Ejemplo: secuencia de largo finito

- Se quiere encontrar la secuencia cuya transformada Z es

$$X(z) = z^2 - \frac{1}{2}z - 1 + \frac{1}{2}z^{-1}.$$

- Teniendo en cuenta que (ecuación 9)

$$\delta[n-k] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} z^{-k}, \qquad \begin{array}{ll} \forall z,\ z \neq 0 & \text{si } k > 0 \\ \forall z,\ z < \infty & \text{si } k < 0 \end{array}$$

- por inspección, se llega a que la secuencia es

$$x[n] = \delta[n+2] - \frac{1}{2}\delta[n+1] - \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1].$$

Propiedades de la transformada Z

- Combinando propiedades de la transformada Z con técnicas de inversión, es posible calcular transformadas inversas de expresiones complejas.
- La notación usada será la siguiente:
  - $X(z)$ denota la transformada Z de $x[n]$
  - La ROC de $X(z)$ es indicada por R_x

$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z), \qquad \text{ROC} = R_x$$

Propiedades de la transformada Z

Linealidad

- La linealidad de la transformada se deduce directamente de la definición, e indica que

$$ax_1[n]+bx_2[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} aX_1(z)+bX_2(z), \qquad \text{ROC contiene } R_{x_1}\cap R_{x_2}$$

  - Los polos de la combinación lineal consisten en todos los polos de $X_1(z)$ y $X_2(z)$, excepto que puede haber cancelación de polos con ceros.
  - Por lo tanto, la ROC de la combinación lineal puede ser mayor.

- La propiedad de linealidad ya se usó previamente en en la descomposición en fracciones simples para el cómputo de la transformada inversa.

Propiedades de la transformada Z

Desplazamiento temporal

- La propiedad de desplazamiento temporal indica que

$$x[n-n_0] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} z^{-n_0}X(z), \qquad \text{ROC} = R_x$$

(excepto por la adición o eliminación de $z=0$ o $z=\infty$)

- Demostración: Sea $y[n]=x[n-n_0]$. La transformada Z de $y[n]$ es

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]z^{-n} \\ &\overset{(a)}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-(m+n_0)} \\ &= z^{-n_0}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-m} \\ &= z^{-n_0}X(z) \end{aligned}$$

(a) Cambio de variable

$$m = n - n_0$$

Propiedades de la transformada Z

Ejemplo: aplicación del desplazamiento temporal

- Se considera la transformada Z dada por
$$X(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{4}}, \quad |z| > \frac{1}{4}$$
- Equivalentemente, $X(z)$ se puede expresar en polinomios en z^{-1} como
$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$
- $X(z)$ tiene solo un polo en $z = \frac{1}{4}$ y no tiene ceros. Además, el grado del numerador es igual al grado del denominador en z^{-1}, con $M = N = 1$.
- Por lo tanto, según la ecuación 7, $X(z)$ se puede expresar como

$$X(z) = B_0 + \frac{A_1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} = \frac{B_0 + A_1 - \frac{1}{4}B_0 z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcr} B_0 & = & -4 \\ A_1 & = & 4 \end{array} \right.$$

- concluyendo que
$$X(z) = -4 + \frac{4}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$
- Finalmente, mediante inspección, la secuencia es
$$x[n] = -4\delta[n] + 4\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Propiedades de la transformada Z

Ejemplo: aplicación del desplazamiento temporal

- Notar que $x[n]$ puede escribirse de forma mas concisa como

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1].$$

Lo mismo aplicando la propiedad de desplazamiento temporal

- Partiendo de la transformada original, se ve que

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} = z^{-1} \underbrace{\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}\right)}_{Y(z)} = z^{-1}Y(z)]$$

- Por la propiedad de desplazamiento temporal se cumple que

$$x[n] = y[n-1].$$

Propiedades de la transformada Z

Ejemplo: aplicación del desplazamiento temporal

- Además, $Y(z)$ es una transformada conocida (ecuación 2),

$$y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \qquad \text{ROC:} \quad |z| > \frac{1}{4}$$

- Por lo tanto, se concluye que

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1].$$

Propiedades de la transformada Z

Multiplicación por una secuencia exponencial

$$z_0^n x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z/z_0), \qquad \text{ROC} = |z_0|R_x$$

- Observaciones:
  - En el caso en que z_0 es real positivo, el escalado corresponde a una contracción o expansión del plano complejo en direcciones radiales.
  - Si z_0 es complejo de magnitud unidad, $z_0 = e^{j\omega_0}$, el escalado corresponde a una rotación de ángulo ω_0 del plano complejo.
  - Corresponde a la propiedad de desplazamiento en frecuencia de la transformada de Fourier. Si la transformada de Fourier existe (la ROC contiene la circunferencia unidad), se cumple que

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}/e^{j\omega_0}) = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

Propiedades de la transformada Z

Ejemplo: multiplicación por secuencia exponencial

- Se quiere calcular la transformada Z de $x[n] = r^n \cos(\omega_0 n) u[n]$
- Para eso, se observa que $x[n]$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} x[n] &= r^n \left(\frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2} \right) u[n] \\ &= \frac{1}{2}(re^{j\omega_0})^n u[n] + \frac{1}{2}(re^{-j\omega_0})^n u[n] \end{aligned}$$

- Teniendo en cuenta que $\quad u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1,$
- y usando la propiedad de multiplicación exponencial, se ve que

$$(re^{j\omega_0})^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{re^{j\omega_0}}\right)^{-1}} = \frac{1}{1 - re^{j\omega_0} z^{-1}}, \quad |z| > r$$

$$(re^{-j\omega_0})^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - re^{-j\omega_0} z^{-1}}, \quad |z| > r$$

Propiedades de la transformada Z

Ejemplo: multiplicación por secuencia exponencial

- Usando la propiedad de linealidad se tiene que

$$X(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - re^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - re^{-j\omega_0} z^{-1}}, \qquad |z| > r$$

- Sacando denominador común y operando, se llega a que

$$X(z) = \frac{1 - r\cos\omega_0 z^{-1}}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}, \quad |z| > r$$

Propiedades de la transformada Z

Diferenciación de $X(z)$

- La propiedad de diferenciación indica lo siguiente:

$$nx[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz}, \qquad \text{ROC} = R_x$$

Demostración

- La definición de la transformada Z es

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}.$$

- y la derivada,

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n)x[n]z^{-n-1}$$

- Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
-z\frac{dX(z)}{dz} &= -z\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n)x[n]z^{-n-1}\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n}\\
&= \mathcal{Z}\{nx[n]\}
\end{aligned}$$

Propiedades de la transformada Z

Ejemplo: polo de segundo orden

- Se quiere calcular la transformada Z de $x[n] = na^n u[n]$.
- La transformada Z es

$$\begin{aligned}
X(z) &= -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} \\
&= -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right) \\
&= -z\frac{-az^{-2}}{(1-az^{-1})^2} \\
&= \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right) = \frac{-az^{-2}}{(1-az^{-1})^2}$$

- Por lo tanto,

$$na^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \qquad |z| > |a|$$

Propiedades de la transformada Z

Conjugación de una secuencia compleja

- La transformada de una secuencia conjugada es,

$$x^*[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X^*(z^*), \qquad \text{ROC} = R_x$$

Observaciones:

- Considérese una secuencia $x[n]$ real. Se cumple que

$$\begin{array}{c} x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z) \\ x^*[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X^*(z^*) \end{array} \quad \text{y} \quad x[n] = x^*[n] \quad \Rightarrow \quad X(z) = X^*(z^*)$$

  - La transformada Z en el semiplano inferior es la conjugada del semiplano superior.
  - Por lo tanto, una secuencia real tiene polos y ceros reales y pares complejos conjugados de polos y ceros complejos.

Propiedades de la transformada Z

Inversión temporal

$$x[-n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(1/z), \qquad \text{ROC} = \frac{1}{R_x}$$

Convolución de secuencias

- La propiedad de convolución indica que

$$x_1[n] * x_2[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X_1(z)X_2(z), \qquad \text{ROC contiene } R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

Propiedades de la transformada Z

Convolución de secuencias

Demostración

- La convolución se define como
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k]$$
- La transformada Z de $y[n]$ es

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k] \right\} z^{-n} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k]z^{-n} \\
&\overset{(a)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2[m]z^{-(m+k)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2[m]z^{-m} \\
&= X_1(z)X_2(z)
\end{aligned}$$

(a) Cambio de variable:

$$m = n - k$$

Análisis de sistemas lineales invariantes en el tiempo con la transformada Z

Análisis de SLIT con la transformada Z

- Un SLIT queda completamente caracterizado con su respuesta al impulso $h[n]$, y la salida ante una entrada $x[n]$ está especificada por,

$$y[n] = h[n] * x[n].$$

- Como la transformada Z transforma la convolución en el producto, se cumple que

$$Y(z) = H(z)X(z).$$

- $H(z)$, la transformada Z de la respuesta al impulso de un SLIT se denomina función de transferencia del sistema.

$$X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z)$$

- La transformada Z es particularmente útil en el análisis y diseño de sistema recursivos caracterizados por una ecuación en diferencias.

Función de transferencia de sistemas recursivos

- Los sistemas de respuesta al impulso infinita (IIR) se definen a través de una ecuación en recurrencia,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{10}$$

- La salida se puede determinar recursivamente como,

$$\begin{aligned} y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \cdots + b_M x[n-M] \\ - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \cdots - a_N y[n-N] \end{aligned}$$

  - Se consideró $a_0 = 1$ (no se pierde generalidad)
  - Se vio que si el sistema se encuentra inicialmente en reposo, es decir,

$$y[-1] = y[-2] = \cdots = y[-N] = 0,$$

    el sistema es lineal e invariante en el tiempo.

Función de transferencia de sistemas recursivos

- Se escribe la ecuación de recursión como

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \cdots + a_N y[n-N] =$$
$$b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \cdots + b_M y[n-M]$$

- Aplicando la transformada Z a ambos lados de la igualdad, y teniendo en cuenta las propiedades de linealidad y desplazamiento temporal, se tiene que

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) + \cdots - a_N z^{-N} Y(z) =$$
$$b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + b_2 z^{-2} X(z) + \cdots + b_M z^{-M} X(z).$$

- Luego se sacan los factores comunes $Y(z)$ y $X(z)$

$$Y(z)\left(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}\right) =$$
$$X(z)\left(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_M z^{-M}\right)$$

- Dividiendo $Y(z)$ entre $X(z)$ se obtiene la función de transferencia:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

Función de transferencia de sistemas recursivos

Observaciones

- La función de transferencia de un sistema recursivo es un cociente de polinomios en z^{-1}.
- Para funciones racionales es directo el cálculo de la respuesta al impulso $h[n]$ a partir de la transformada Z del sistema mediante la transformada inversa.
- La respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ se obtiene evaluando la función de transferencia $H(z)$ en la circunferencia unidad $z = e^{j\omega}$.
- Hay una relación directa entre la ecuación de recurrencia y la función de transferencia:
  - los coeficientes que multiplican a los términos $x[n-k]$ en la ecuación en recurrencia son los coeficientes del polinomio del denominador de la función de transferencia.
  - los coeficientes que multiplican a los términos $y[n-k]$ en la ecuación en recurrencia son los coeficientes del polinomio del numerador de la función de transferencia.

Función de transferencia de sistemas recursivos

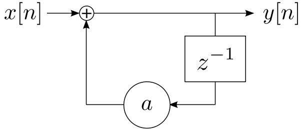
Ejemplo: sistema de primer orden

- Se considera el siguiente sistema IIR de primer orden:

Ecuación en recurrencia

$$y[n] = ay[n-1] + x[n]$$

Diagrama de bloques



- Se vio previamente que la respuesta al impulso del sistema puede calcularse recursivamente.
- Para eso, se impone la condición inicial $y[-1] = 0$ y se establece la entrada en $x[n] = \delta[n]$.
- Resolviendo el sistema recursivamente en $n \geq 0$ se tiene que,

$$y[0] = ay[-1] + \delta[0] = 1$$

$$y[1] = ay[0] + \delta[1] = a$$

$$y[2] = ay[1] + \delta[2] = a^2$$

$$y[3] = ay[2] + \delta[3] = a^3$$

$$\vdots$$

$$y[n] = a^n, \qquad \text{si } n \geq 0$$

Función de transferencia de sistemas recursivos

Ejemplo: sistema de primer orden

- Se concluye que la respuesta al impulso es $h[n] = a^n u[n]$.

Cálculo de $h[n]$ a partir de la función de transferencia

- Aplicando la transformada Z a la ecuación en recurrencia,

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] \qquad\qquad Y(z) = az^{-1}Y(z) + X(x)$$

- Operando, se obtiene la función de transferencia del sistema,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

- Asumiendo que el sistema es causal, como tiene un único polo en a, la ROC es $|z| > |a|$.
- Por inspección, la transformada Z inversa es $h[n] = a^n u[n]$.
- En el caso de ecuaciones en recurrencia mas complejas, en general es mas fácil el cálculo de la respuesta al impulso a partir de la inversión de la función de transferencia.

Función de transferencia de sistemas recursivos

Ejemplo: sistema de segundo orden

- La función de transferencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo es
$$H(z) = \frac{\left(1 + z^{-1}\right)^2}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{3}{4}z^{-1}\right)}.$$
Se quiere encontrar la ecuación en recurrencia del sistema y la respuesta al impulso $h[n]$.

Ecuación en recurrencia

- Expandiendo el numerador y el denominador para obtener un cociente de polinomios, se llega a que
$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{11}$$
- y despejando, se obtiene
$$\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}\right)Y(z) = \left(1 + 2z^{-1} + z^{-2}\right)X(z)$$

Función de transferencia de sistemas recursivos

Ejemplo: sistema de segundo orden

- Luego

$$Y(z) + \frac{1}{4}z^{-1}Y(z) - \frac{3}{8}z^{-2}Y(z) = X(z) + 2z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z)$$

- Finalmente, aplicando la propiedad de desplazamiento temporal de la transformada Z, se llega a que,

$$y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{3}{8}y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

Respuesta al impulso

- Para calcular la respuesta al impulso, hay que calcular la transformada inversa de $H(z)$.
- Para eso, se puede descomponer $H(z)$ en fracciones simples.
  - $H(z)$ tiene el grado del denominador igual al grado del denominador en z^{-1}. Concretamente, en este caso $N = M = 2$.

Función de transferencia de sistemas recursivos

Ejemplo: sistema de segundo orden

Respuesta al impulso

- Por lo tanto, aplicando la ecuación 7, $H(z)$ puede expresarse como

$$H(z) = B_0 + \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}$$

- Sacando denominador común e igualando el numerador al numerador de la transformada original (ecuación 11), se obtienen B_0, A_1 y A_2,

$$H(z) = -\frac{8}{3} + \frac{\frac{18}{5}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{15}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}$$

- y por inspección se llega a que,

$$h[n] = -\frac{8}{3}\delta[n] + \frac{18}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{15}\left(-\frac{3}{4}\right)^n u[n].$$

Representación en diagrama de bloques

- La respuesta al impulso de sistemas LIT en serie es la convolución de las respuestas al impulso de cada sistema en la serie.
- La transformada Z transforma la convolución en producto. Por lo tanto, la función de transferencia de sistemas en serie es el producto de las funciones de transferencia de cada sistema en la serie.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n]} \longrightarrow \boxed{h_2[n]} \longrightarrow y[n] \qquad x[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n] * h_2[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{H_1(z)} \longrightarrow \boxed{H_2(z)} \longrightarrow y[n] \qquad x[n] \longrightarrow \boxed{H_1(z)H_2(z)} \longrightarrow y[n]$$

- Considérese un sistema recursivo genérico,

Ecuación en recurrencia

$$y[n] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Función de transferencia

$$H(z) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

(Por conveniencia, se cambió la forma de la ecuación 10)

Representación en diagrama de bloques

- La función de transferencia $H(z)$ se puede escribir como

$$H(z) = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right)}_{H_1(z)} \underbrace{\left(\frac{1}{1 - \sum\limits_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}\right)}_{H_2(z)} = H_1(z)H_2(z)$$

- Esto indica que el sistema puede considerarse como la cascada de dos sistemas con funciones de transferencia $H_1(z)$ y $H_2(z)$.

Representación en diagrama de bloques

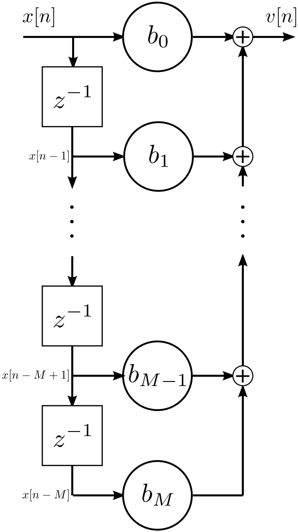
- Considerando que el sistema $H_1(z)$ produce la salida $v[n]$ con la entrada $x[n]$, se cumple que,

$$H_1(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = \frac{V(z)}{X(z)}$$

- y por lo tanto,

$$V(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

- Antitransformando, se obtiene la ecuación en recurrencia,



$$v[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_M x[n-M].$$

Representación en diagrama de bloques

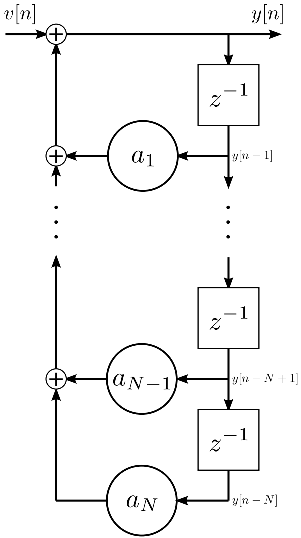
- Considerando que el sistema $H_2(z)$ produce la salida $y[n]$ con la entrada $v[n]$, se tiene que,

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{Y(z)}{V(z)}$$

- y por lo tanto,

$$Y(z) - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = V(z)$$

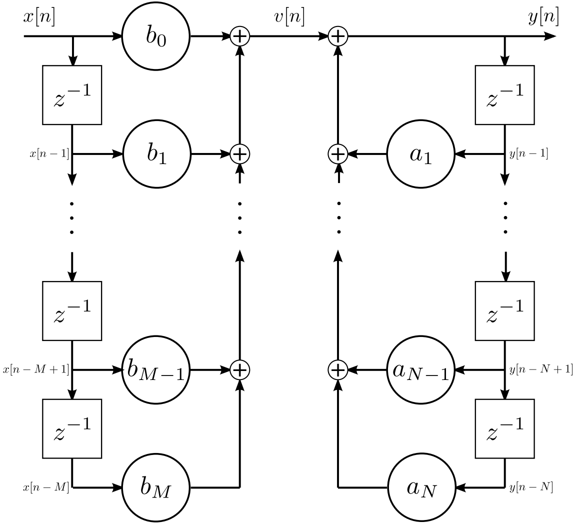
- Antitransformando, se obtiene la ecuación en recurrencia,



$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + v[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \cdots + a_N y[n-N] + v[n]$$

Representación en diagrama de bloques

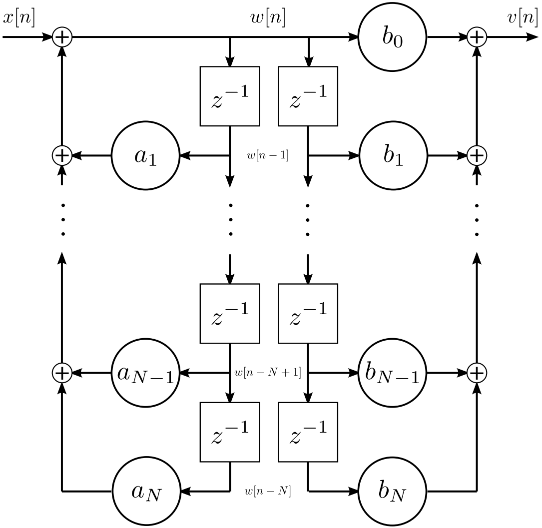
- El sistema completo consiste en ambos sistemas en cascada. El diagrama de bloques queda



Representación en diagrama de bloques

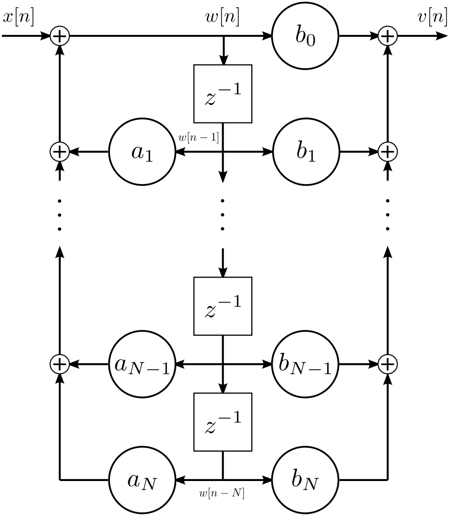
- Por tratarse de SLIT, puede cambiarse el orden de los sistemas en la cascada manteniendo la función de transferencia global.

- Se asume sin perder generalidad que $M = N$.
- Si lo anterior no fuera cierto, algunos coeficientes a_k o b_k serían nulos en la figura.
- La señal en las cadenas de retardos es la misma, por lo que puede usarse solo una cadena de retardos.



Representación en diagrama de bloques

- Implementación en forma canónica: usando la cantidad mínima de retardos.



Función de transferencia de sistemas recursivos

Ejemplo: diagrama de bloques

- Se considera el sistema LIT con función de transferencia

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.9z^{-2}}.$$

- La ecuación en recurrencia se obtiene viendo que

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \Rightarrow \quad Y(z) - 1.5z^{-1}Y(z) + 0.9z^{-2}Y(z) = X(z) + 2z^{-1}X(z)$$

- y antitransformando,

$$y[n] - 1.5y[n-1] + 0.9y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$$

- Según la definición del sistema recursivo genérico, al despejar $y[n]$ quedan los coeficientes a_k y b_k con el signo correcto

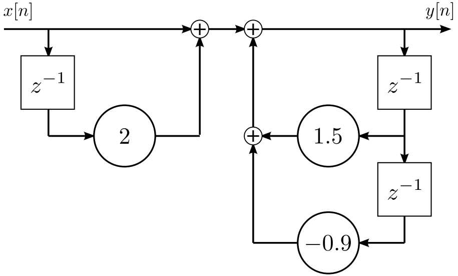
$$y[n] = 1.5y[n-1] - 0.9y[n-2] + x[n] + 2x[n-1]$$

- Por lo tanto, $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $a_1 = 1.5$ y $a_2 = -0.9$.

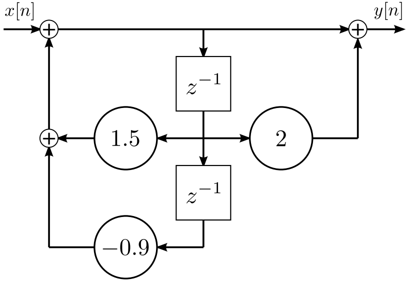
Función de transferencia de sistemas recursivos

Ejemplo: diagrama de bloques

- El diagrama de bloques es



- Y la implementación en forma canónica es



Referencias I

Oppenheim, A. V. and Schafer, R. W. (1999).
Discrete-Time Signal Processing, chapter 3, 5 and 6.
Prentice Hall, 2nd edition.

Smith, S. W. (1997).
The Scientist & Engineer's Guide to Digital Signal Processing, chapter 33.
California Technical Pub., 1st edition.