Matemática Discreta 1 - Universidad de la República - CENUR Noreste

SEGUNDO PARCIAL - 25 DE NOVIEMBRE DE 2025.

Letra con solución

Múltiple Opción

1. Sea T un árbol con 120 aristas, 56 vértices de grado 1, a vértices de grado 2, b vértices de grado 3, y sin vértices de grado ≥ 4. Entonces:

A) $a = 9$, $b = 57$.

B) $a = 8$, $b = 56$.

C) $a = 9$, $b = 56$.

D) $\boxed{\text{a=11,b=54}}$.

Sol Como $T = (V, E)$ es un árbol, se cumple: $|V| = |E| + 1$. En este caso la cantidad total de vértices es: $|V| = 56 + a + b$, y la cantidad de aristas es: $|E| = 120$. Por lo tanto:

$$56 + a + b = 120 + 1 \Leftrightarrow a + b = 121 - 56 = 65.$$

Por otro lado, todo grafo cumple: $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$. En este caso esto equivale a la ecuación:

$$2 \times 120 = 56 + 2a + 3b \Leftrightarrow 2a + 3b = 240 - 56 = 184.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales, se obtiene: $a = 11$, $b = 54$.

---

2. Dado un grafo G, el grafo complemento de G se denota $\overline{G}$. Considere los grafos de la figura.

A) $\boxed{G_2 = \overline{G}_1 \text{ y } G_1 \text{ y } G_3 \text{ son isomorfos.}}$

B) $G_2 = \overline{G}_1$ y G_1 y G_2 son isomorfos.

C) $G_2 = \overline{G}_1$ y G_1 y G_3 no son isomorfos.

D) $G_2 \neq \overline{G}_1$ y G_1 y G_3 no son isomorfos.

Sol Usando la definición de grafo complemento, es sencillo ver que $G_2 = \overline{G}_1$. De igual forma se obtiene que $\overline{G}_3 = G_2$. Por lo tanto: $\overline{G}_1$ y $\overline{G}_3$ son isomorfos. Esto implica que G_1 y G_3 son isomorfos.

---

3. La cantidad de relaciones de orden R en $\{1, 2, 3, 4\}$, que verifican las siguientes condiciones: (i) los únicos elementos minimales son 1 y 2, y (ii) $3R4$, es:

A) 3. **B)** 4. **C)** $\boxed{5}$. **D)** 6.

Sol Sabemos que 1 y 2 son minimales, por lo que no se comparan entre sí, y que $3 < 4$. Como 3 no es minimal, entonces es mayor que 1, o que 2 o que ambos (porque es menor estricto que 4). Las posibilidades son (usamos $x < y$ para indicar $x\ R\ y$):

- $1 < 3 < 4$, 2 no relacionado con 3: según si además $2 < 4$ o no, se tienen 2 posibilidades;
- $2 < 3 < 4$, 1 no relacionado con 3: según si además $1 < 4$ o no, se tienen 2 posibilidades;
- $1 < 3 < 4$ y $2 < 3 < 4$ es una posibilidad.

La respuesta correcta es cinco.

---

4. La cantidad de relaciones de equivalencia R en $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, con exactamente 3 clases de equivalencia y tales que $(1, 2) \in R$, $(1, 3) \notin R$, es:

A) 3. **B**) 4. **C**) $\boxed{5}$. **D**) 6.

Sol Sea C la clase de equivalencia de 1 y 2 (que es la misma por hipótesis). Sea D la clase de 3, que por hipótesis es diferente de la clase C. Como la relación debe tener exactamente 3 clases de equivalencia, hay una tercera clase E (no vacía). Resta calcular de cuántas formas se pueden repartir 4 y 5 entre las clases C, D y E. Como E es no vacía, se presentan los siguientes casos:

- $E = \{4, 5\}$ y entonces $C = \{1, 2\}$ y $D = \{3\}$.
- $E = \{4\}$ y quedan dos posibilidades para 5: $5 \in C$ o $5 \in D$.
- $E = \{5\}$ y quedan dos posibilidades para 4: $4 \in C$ o $4 \in D$.

En total hay cinco posibles particiones, que corresponden a cinco relaciones de equivalencia.

---

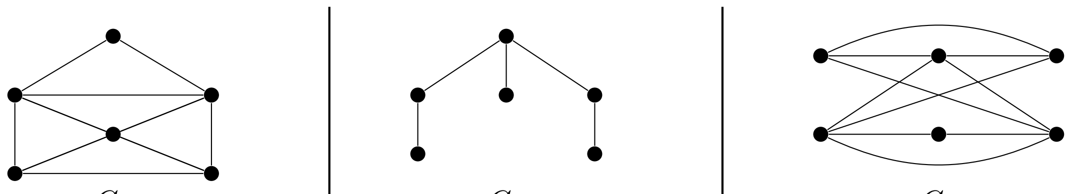
5. Considere los grafos de la figura. Abreviamos CE Circuito Euleriano y RE Recorrido Euleriano.

A) Sólo G_1 y G_3 admiten CE.

B) Sólo G_2 y G_3 admiten RE.

C) Sólo G_2 admite RE.

D) $\boxed{\text{Sólo } G_1 \text{ y } G_3 \text{ admiten RE}}$.



G_1 G_2 G_3

Sol Un grafo admite un CE sii todos sus vértices tienen grado par. Esto no ocurre para ninguno de los grafos de la figura. Por otro lado, un grafo admite un RE sii todos sus vértices tienen grado par, excepto dos de sus vértices, que deben tener grado impar. Esto ocurre solamente para los grafos G_1 y G_3.

---

6. ¿Cuántos subgrafos recubridores **conexos** tiene el grafo ciclo de 20 vértices C_{20}?

A) 19. **B**) 20. **C**) $\boxed{21}$. **D**) 22.

Sol Un subgrafo recubridor debe utilizar todos los vértices del grafo original, pudiendo elegir qué aristas del grafo original se mantienen.

El propio grafo C_{20} es un subgrafo recubridor conexo de sí mismo. Esto corresponde al caso en que no se elimina ninguna arista. Por otro lado, si se elimina una sola arista (cualquiera), se obtiene un subgrafo recubridor conexo. Esto se puede hacer de 20 formas distintas, dado que C_{20} tiene exactamente 20 aristas. Finalmente, si se eliminan dos aristas o más de C_{20}, se obtiene un grafo no conexo. Por lo tanto, la cantidad total de subgrafos recubridores conexos de C_{20} es 21.

Desarrollo. Detallar el razonamiento utilizado en cada parte.

1. [12 puntos] Considere la recurrencia dada por:

$$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = -6 \times 2^n, \ \forall\, n \in \mathbb{Z}, \ n \geq 0.$$

A) Calcular la solución general de la recurrencia **homogénea** asociada.

Sol La recurrencia homogénea asociada es:

$$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = 0, \ \forall \ n \in \mathbb{Z}, \ n \geq 0.$$

Su polinomio característico tiene las siguientes raíces:

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 10}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow x = 5, \ x = 2.$$

Por lo tanto, la solución general de la homogénea, es:

$$a_n^H = A \times 5^n + B \times 2^n, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

B) Calcular una solución particular de la recurrencia **no homogénea**.

Sol Como $x = 2$ es raíz simple del polinomio característico, y aparece como potencia en el término independiente -6×2^n, buscamos una solución particular de la forma: $a_n^P = C \times n^1 \times 2^n$, para alguna constante C a determinar. Reemplazando en la recurrencia no homogénea, se obtiene $C = 1$. Por lo tanto, una solución particular de la no homogénea es:

$$a_n^P = n2^n.$$

C) Calcular la solución de la recurrencia **no homogénea** que cumple: $a_0 = -1$, $a_1 = 2$.

Sol La solución general de la no homogénea es:

$$a_n = a_n^H + a_n^P = A \times 5^n + B \times 2^n + n2^n, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo las condiciones $a_0 = -1$ y $a_1 = 2$, se obtiene: $A = \frac{2}{3}$, $B = -\frac{5}{3}$. Por lo tanto, la solución buscada es:

$$a_n = \frac{2}{3} \times 5^n - \frac{5}{3} \times 2^n + n2^n, \quad \forall \ n \geq 0, \ n \in \mathbb{Z}.$$

2. [12 puntos]

A) Definir árbol y dibujar un árbol con exactamente 4 aristas y 3 hojas (vértices colgantes).

Sol Un árbol es un grafo conexo que no tiene ciclos. La siguiente figura muestra un árbol con exactamente 4 aristas y 3 hojas.

B) Probar que si $T = (V, E)$ es un árbol con $|V|$ vértices y $|E|$ aristas, entonces: $|V| = |E| + 1$.

Sol Ver la prueba del Teorema 12.3 del Grimaldi (página 609).