Matemática Inicial

Primer parcial, 30 de setiembre de 2025.

N° Lista	Apellido y Nombre	Cédula

Importante: En esta prueba evaluaremos fundamentalmente el desarrollo de las resoluciones más que los resultados. Por lo tanto, es importante que las respuestas estén debidamente justificadas y que lo que escriban sea legible y comprensible.

Ejercicio 1 *Resolver en $\mathbb{R}$:*

a) $3^{x^2-x} = 9$.
Solución: *Llevamos el segundo miembro de la igualdad a la misma base, Entonces se tiene*

$$\begin{aligned} 3^{x^2-x} = 3^2 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - x = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \end{aligned}$$

. Resolviendo esta ecuación de segundo grado se tiene que $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(-2)}}{2}$, por lo que $x_1 = 2, x_2 = -1$. Con esto, si llamamos S al conjunto solución se tiene que $S = \{-1, 2\}$.

b) $\log(x+1) + \log(x-4) = \log(x-1) + \log\frac{3}{2}$.
Solución: *Primero determinams el conjunto de valores donde tiene sentido la expresión. Se tiene que cumplir que*

- $x + 1 > 0$.
- $x - 4 > 0$.
- $x - 1 > 0$.

El conjunto donde esto se cumple simultáneamente es el intervalo $(4, +\infty)$.

Estamos en condiciones ahora de resolver la ecuación teniendo en cuenta lo anterior.

$$\begin{aligned} \log(x+1) + \log(x-4) \quad &= \quad \log(x-1) + \log\frac{3}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log\left((x+1)(x-4)\right) \quad &= \quad \log\frac{3}{2}(x-1) \end{aligned}$$

Entonces $(x+1)(x-4) = \frac{3}{2}(x-1) \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 3x - 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 9x - 5 = 0$.

Resolviendo esta ecuación de segundo grado se tiene que $x = \frac{9 \pm \sqrt{81-4(2)(-5)}}{4}$, entonces $x_1 = \frac{9+11}{4} = 5$, $x_2 = \frac{9-11}{4} = -\frac{1}{2}$. Ahora, descartamos la solución $-\frac{1}{2}$ pues la ecuación solo es válida para $x > 4$. Con esto el conjunto solución $S = \{5\}$.

Ejercicio 2 *Hallar el conjunto solución de la inecuación*

$$|3x-1| > 2x+1.$$

Solución:

- *Si* $3x-1>0$, *entonces la inecuación queda* $3x-1>2x+1$.
  En este caso la condición $3x-1>0$, *es equivalente a* $x>\frac{1}{3}$. *Resolvemos entonces la inecuación en este caso.*
  $$3x-1>2x+1 \Leftrightarrow x>2.$$
  Ahora intersectamos el intervalo solución $(2,+\infty)$ *con el intervalo* $(\frac{1}{3},+\infty)$. *La solución en este caso es entonces* $S_1=(2,+\infty)$.

- *Si* $3x-1<0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{3}$, *entonces la inecuación queda*
  $$-(3x-1)>2x+1 \Leftrightarrow 3x-1<-2x-1 \Leftrightarrow 5x<0 \Leftrightarrow x<0.$$
  Por tanto $S_2=(-\infty,0)\cap(-\infty,\frac{1}{3})=(-\infty,0)$.

Entonces $S=S_2\cup S_1=(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

Ejercicio 3 *Para cada una de las siguientes igualdades de conjuntos, probarla en caso de ser cierta; en caso contrario, mostrar mediante un ejemplo que no se cumple.*

a) $(A\cap B^c)^c = A^c\cap B$.
Solución: *La igualdad no es cierta. Por ejemplo consideramos* $\mathcal{U}=\{1,2,3,4,5\}$ *y* $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$. *En este caso* $A\cap B^c=\{1,2\}\cap\{1,4,5\}=\{1\}$, *con lo que* $(A\cap B^c)^c=\{2,3,4,5\}$. *Por otro lado* $A^c\cap B=\{3,4,5\}\cap\{2,3\}=\{3\}$.

b) $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.
Solución: *Mostremos la doble inclusión de conjuntos.*

($\subset$) *Sea* $x\in(A\cap B)^c$, *entonces* $x\notin A\cap B$, *entonces* $x\notin A$ *o* $x\notin B$, *entonces* $x\in A^c$ *o* $x\in B^c$, *entonces* $x\in A^c\cup B^c$.

($\supset$) *Sea* $x\in A^c\cup B^c$, *entonces* $x\in A^c$ *o* $x\in B^c$, *esto implica que* $x\notin A$ *o* $x\notin B$, *con lo que* $x\notin A\cap B$, *por tanto* $x\in(A\cap B)^c$.

Ejercicio 4 *Probar por inducción completa que para todo* $n\geq 7$ *se cumple que* $3^n\leq n!$.

Solución: *Probemos primero el paso base. Consideremos* $n=7$: *Se tiene que* $3^7=2187$, *por otro lado* $7!=5040$. *Entonces* $3^7\leq 7!$.

Hipótesis Inductiva: *La desigualdad es cierta para un determinado* $n\geq 7$, *es decir* $3^n\leq n!$ *para cierto* $n\geq 7$.

Tesis inductiva: *La desigualdad es cierta para el siguiente natural, es decir,* $3^{n+1}\leq(n+1)!$.

Prueba: Tenemos que partir por ejemplo de 3^{n+1} *y llegar a que es menor o igual a* $(n+1)!$. *En el camino utilizaremos la hipótesis inductiva.*

$$3^{n+1}=3\cdot 3^n \overset{(HI)}{\leq} 3\cdot n! \overset{3<7<n+1}{\leq} (n+1)n!=(n+1)!$$

□