

PRÁCTICO 5: SUCESSIONES DEFINIDAS POR RELACIONES DE RECURRENCIA
(SECCIONES 10.1, 10.2 Y 10.3 DEL GRIMALDI)

Los **dos** ejercicios marcados con **asterisco** se pueden entregar para su corrección.

Recurrencias lineales de orden uno

Ejercicio 1. En cada caso, hallar una recurrencia cuya solución sea la secuencia de números dada. Indicar la recurrencia y el valor inicial.

- a. 3, 6, 12, 24, 48, ... b. 2, 4, 8, 16, 32, ... c. -2, 4, -8, 16, -32, ... d. $\frac{1}{5}, \frac{1}{15}, \frac{1}{45}, \frac{1}{135}, \dots$

Ejercicio 2. Resolver cada una de las siguientes recurrencias con su valor inicial. Luego calcular a_{20}

- a. $a_n = 2a_{n-1}, \forall n \geq 1$, con $a_0 = 5$. c. $a_{n+1} - 3a_n = 0, \forall n \geq 0, a_{50} = 2 \cdot 3^{-8}$.
b. $3a_n + 2a_{n-1} = 0, \forall n \geq 1, a_0 = -3$.

Ejercicio 3. (Primer Parcial 2009) Sabemos que $a_0 = 1$ y que para cada entero positivo n se cumple que $a_n - 2a_{n-1} = 3 \times 2^n$. Calcular a_{50} .

Problemas de conteo en términos de recurrencias

Ejercicio 4. En cada caso, hallar una recurrencia cuya solución sea la cantidad pedida. No se pide resolver la recurrencia.

- a. La cantidad de saludos entre las primeras n personas que llegan a una reunión.
b. El número de secuencias de ceros y unos de largo n en las cuales no aparecen dos ceros seguidos.
c. El número de secuencias de largo n de letras A, B y C que no tienen la letra A dos veces seguidas.
d. La cantidad de formas de subir una escalera de n escalones si se pueden subir de a uno o de a dos escalones en cada paso.
e. Lo anterior pero sin que se puedan saltar dos veces seguidas un escalón (o sea, que si se saltea un escalón, entonces el siguiente no se saltea).
f. El número de secuencias de unos y doses que suman n . Por ejemplo, para $n = 3$ hay exactamente 3 secuencias: 111, 12 y 21.
g. El determinante de la matriz A de $n \times n$ que tiene 2's en la diagonal, 1's en las diagonales inferior y superior, y 0's en el resto de las entradas.

Ejercicio 5. [*] Resolver las siguientes relaciones de recurrencia.

- a. $a_{n+1} - 2a_n = (3n - 1), \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$, con $a_0 = 1$.
b. $b_{n+1} = 2b_n - 3 \times 2^n, \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$, con $b_1 = 0$.
c. $c_{n+1} - 2c_n = -3 \times 2^n + (3n - 1), \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$, con $c_0 = 2$. *Sugerencia: usar superposición para obtener una solución particular.*

Recurrencias lineales de orden dos

Ejercicio 6. Resolver las siguientes relaciones de recurrencia con los valores iniciales dados.

- a. $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0$, con $a_0 = 1, a_1 = 3$.
- b. $b_{n+2} - 6b_{n+1} + 9b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0$, con $b_0 = 5, b_2 = 27$.
- c. $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} + 2, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, con $a_0 = 0, a_{100} = 0$.

Ejercicio 7. [*] Se pretende diseñar una bandera con n franjas verticales, cada una de las cuales puede ser de color rojo, azul, verde o blanco. Se debe cumplir con la siguiente condición: las franjas adyacentes no pueden ser del mismo color, y tampoco la primera y la última franja. Sea a_n la cantidad de banderas de n franjas que cumplen lo pedido.

- a. Calcular a_2 y a_3 .
- b. Calcular a_4 . *Sugerencia: separar en casos.*
- c. Hallar una relación de recurrencia entre los valores de a_n , para $n \geq 4$. *Sugerencia: separar en casos.*
- d. Usando lo anterior, hallar a_n para todo $n \geq 2$ (resolver la recurrencia con los valores iniciales calculados en el primer punto).
- e. Verificar que el valor de a_4 coincide con el calculado en el segundo punto.

Ejercicio 8. Consideremos la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ asociada a la secuencia de Fibonacci: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$

- a. Dar una relación de recurrencia para los términos de la sucesión. Indicar la condición inicial.
- b. Probar que la solución está dada por: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$.
- c. Probar que a_n es un entero positivo para todo natural n .

Ejercicio 9. Considere la relación de recurrencia $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = f(n), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Resolver la recurrencia para cada una de las siguientes funciones $f(n)$ y valores iniciales.

- a. $f(n) = 3^n, a_0 = 1, a_1 = 3$.
- b. $f(n) = 2^n(n-1), a_0 = 1, a_1 = 4$.
- c. $f(n) = 3^n + 2^n(n-1), a_0 = 1, a_1 = 2$.
Sugerencia: usar superposición para obtener una solución particular.

Cambio de variable

Ejercicio 10. Considere la siguiente recurrencia: $a_{n+2} + 4a_n = 0, \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$; con valor inicial $a_0 = 1$. Calcular a_{100} . *Sugerencia: cambio de variable $b_n = a_{2n}$.*

Ejercicio 11. Aplicar cambios de variables para resolver las cada una de las siguientes recurrencias.

- a. $a_n - na_{n-1} = 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+, \text{ con } a_0 = 1$.
- b. $na_n - (n-1)a_{n-1} = 0, \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$.
- c. $a_n = 2a_{n-1}^p, \forall n \in \mathbb{Z}^+, \text{ siendo } a_0 = 1 \text{ y } p \text{ un entero mayor que } 1$.
- d. $a_{n+2} = 4a_{n+1}^2/a_n, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ siendo } a_0 = a_1 = 1$