Matemática Discreta 1 - Universidad de la República - CENUR Noreste

PRIMER PARCIAL - 24 DE SETIEMBRE DE 2025.

Letra con solución

Múltiple Opción

1. Hay 8 personas para trabajar en un bar. Se quieren formar dos turnos (uno matutino y uno vespertino), de manera que queden 4 personas en cada turno. Indicar la cantidad de formas de hacerlo.

Sol Primero se eligen 4 personas para el turno matutino. No importa el orden en que se eligen, sino qué personas se eligen. La cantidad de formas de hacerlo es: C_4^8. Luego, de las 4 personas restantes, se eligen 4 para formar el turno vespertino. Esto se puede hacer de una sola forma. Por lo tanto, por la regla del producto, la respuesta es $C_4^8 \times 1 = C_4^8$.

---

2. Indicar la cantidad de enteros positivos de n cifras, con $n \geq 4$, cuyos únicos dígitos son $1, 2$ y 3, y estos tres dígitos aparecen al menos una vez.

Sol A cada cifra (distinta) de n le tenemos que asignar un dígito: 1, 2 o 3. La cantidad de formas de hacerlo es la cantidad de funciones del conjunto de posiciones de los dígitos $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, al conjunto de dígitos posibles $\{1, 2, 3\}$. Si además pedimos que aparezcan los tres dígitos al menos una vez, estamos pidiendo que la función sea sobreyectiva. Por lo tanto, la respuesta es: $\text{Sob}(n, 3)$.

---

3. Indicar el coeficiente de x^5 en el desarrollo de la potencia $(x^3 + 2x - 1)^{10}$.

Sol Vamos a usar el teorema del multinomio, para el caso de tres variables, y exponente $n = 10$. Para esto definimos las variables $x_1 = x^3$, $x_2 = 2x$, $x_3 = -1$.

Al desarrollar la potencia $(x_1 + x_2 + x_3)^{10}$, se obtienen sumandos de la forma: $Cx_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}$, con $n_1 + n_2 + n_3 = 10$. El teorema del multinomio nos dice que la constante C de cada sumando, vale:

$$C = \frac{10!}{n_1!n_2!n_3!}.$$

Tenemos que determinar cuáles son los sumandos donde la variable x aparece elevada a la cinco. Para esto expresamos cada sumando en función de la variable original x:

$$Cx_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3} = C(x^3)^{n_1}(2x)^{n_2}(-1)^{n_3}, \quad n_1 + n_2 + n_3 = 10.$$

Los exponentes que hacen aparecer x^5 (y que suman 10 y son no negativos), son:

$$n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 7, \quad n_1 = 0, n_2 = 5, n_3 = 5.$$

Es decir que, en el desarrollo de la potencia, los dos sumandos que nos interesan son:

$$\frac{10!}{1!2!7!}(x^3)^1(2x)^2(-1)^7 + \frac{10!}{0!5!5!}(x^3)^0(2x)^5(-1)^5 = -\frac{10!}{1!2!7!}2^2x^5 - \frac{10!}{5!5!}2^5x^5.$$

Por lo tanto, el coeficiente que multiplica a x^5, es:

$$-\frac{10!}{2!7!}2^2 - \frac{10!}{5!5!}2^5.$$

---

4. Indicar la cantidad de permutaciones de los dígitos de 1112223, que no tienen tres dígitos iguales en posiciones consecutivas.

Sol Esto se puede hacer de distintas formas. Vamos a resolverlo usando el PIE. El universo U son todas las permutaciones posibles, sin restricciones. Por lo tanto: $|U| = \frac{7!}{3! \times 3!}$. Las condiciones sobre este universo son:

A) condición 1: la permutación tiene tres unos consecutivos.

B) condición 2: la permutación tiene tres dos consecutivos.

Nuestro interés es calcular la cantidad de elementos del universo que no cumplen la condición 1 y que además no cumplen la condición 2. A esta cantidad la denotamos: $N(\bar{c_1}\bar{c_2})$. Por el PIE, se tiene:

$$N(\bar{c_1}\bar{c_2}) = |U| - (N(c_1) + N(c_2)) + N(c_1c_2).$$

Para calcular $N(c_1)$, podemos pensar que tenemos que permutar libremente las siguientes "letras": 111, 3, 2, 2 y 2. La cantidad de formas de hacerlo es: $\frac{5!}{3!}$. Se obtiene el mismo valor para $N(c_2)$. De forma similar, pero con las tres letras distintas 111, 222 y 3, se obtiene: $N(c_1c_2) = 3!$. Por lo tanto:

$$N(\bar{c_1}\bar{c_2}) = \frac{7!}{3! \times 3!} - 2\frac{5!}{3!} + 3! = 7 \times 5 \times 4 - 2 \times 5 \times 4 + 6 = 106.$$

---

5. Sean $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Indicar la cantidad exacta de funciones $f : A \to B$ que verifican que $f(a)$ es par.

Sol Como $f(a)$ debe ser par, tenemos exactamente 3 posibles valores que le podemos asignar a $f(a)$: 2, 4 o 6. Por otro lado, $f(b)$ y $f(c)$ pueden tomar cualquiera de los 6 valores. Por lo tanto, la respuesta es: $3 \times 6 \times 6 = 108$.

---

6. Hallar la cantidad de permutaciones de los dígitos de 123456789 tales que los números pares están en su posición original y 1 aparece antes que 3.

Sol Los dígitos pares deben permanecer en sus posiciones originales. Por lo tanto, solamente pueden intercambiarse los impares entre sí. Como estos 5 números impares son distintos, el número de permutaciones distintas de estos es: $5! = 120$. De estas permutaciones, exactamente la mitad tienen al 1 antes que al 3 (por simetría). Por lo tanto, la respuesta es $120/2 = 60$.

Desarrollo

Importante: en cada parte se debe detallar el razonamiento utilizado para obtener el resultado pedido.

1. [8 puntos] Probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que: $2^n \geq n^2$, para todo $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$. Utilizar inducción para probar la propiedad.

La siguiente tabla muestra los valores de 2^n y n^2 para los primeros valores de n natural:

n	0	1	2	3	4	5	6
2^n	1	2	4	8	16	32	64
n^2	0	1	4	9	16	25	36

La tabla muestra que la propiedad no se cumple para $n = 3$, aunque sí parece cumplirse a partir de $n = 4$. Por lo tanto, tenemos la siguiente conjetura: $2^n \geq n^2$, para todo $n \geq 4,\ n \in \mathbb{N}$.

Vamos a intentar probar esta conjetura mediante el Teorema de inducción simple.

Paso base Veamos que para $n = 4$ se cumple la propiedad. En efecto: $2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$.

Paso inductivo Fijamos $k \geq 4$ natural. La hipótesis de inducción es que la propiedad se cumple para dicho k. Es decir, asumimos que se cumple:

$$2^k \geq k^2, \text{ para } k \in \mathbb{N} \text{ fijo}, \ k \geq 4.$$

A partir de esto, tenemos que probar que se cumple:

$$2^{k+1} \geq (k+1)^2, \ \forall\ k \geq 4, \ k \in \mathbb{N}.$$

Usando la hipótesis de inducción, se tiene:

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k \geq 2 \times k^2.$$

Por lo tanto, basta con probar que se cumple: $2 \times k^2 \geq (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$. Reordenando, esto equivale a probar que se cumple:

$$k^2 - 2k - 1 \geq 0, \ \forall\ k \geq 4.$$

Esta última desigualdad se podría probar por inducción en k. Sin embargo, resulta más sencillo probarla mediante un análisis del signo de $k^2 - 2k - 1$. Esta expresión se anula en $k_0 = 1 - \sqrt{2}$ y $k_1 = 1 + \sqrt{2}$. A la derecha de k_1 el signo es positivo. Es decir:

$$k^2 - 2k - 1 > 0, \ \forall\ k \geq k_1 = 1 + \sqrt{2} \simeq 2{,}41.$$

En particular, la desigualdad se cumple para todo $k \geq 4$, que es lo que necesitábamos para culminar la prueba del paso inductivo.

Conclusión Por el teorema de inducción, se concluye que: $2^n \geq n^2$, $\forall\ n \geq 4, \ n \in \mathbb{N}$.

---

2. [8 puntos] Se quiere armar una bolsa con 17 bizcochos, pudiendo elegir entre cuatro tipos de bizcocho. Además, la bolsa debe contener: al menos 1 bizcocho de cada tipo y como mucho 5 bizcochos de cada tipo.

A) Expresar el problema como uno de contar la cantidad de soluciones enteras de una ecuación, con las restricciones que correspondan.

Sol Consideremos la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$, con las restricciones: $1 \leq x_i \leq 5$, para todo $i = 1, 2, 3, 4$.
La variable x_i representa la cantidad de bizcochos del tipo i utilizados para armar la bolsa de bizcochos. La cantidad de soluciones enteras de este nuevo problema coincide con la cantidad de formas de armar una bolsa de bizcochos con las condiciones de la letra.

B) Hallar la cantidad de soluciones de la parte anterior. Expresar el resultado en términos de combinaciones sin repetición.

Sol Primero vamos a deshacernos de las restricciones $x_i \geq 1$. Para esto asignamos un bizcocho de cada tipo a la bolsa. De esta forma nos quedan $17 - 4 = 13$ bizcochos para repartir. El nuevo problema equivale a contar la cantidad de soluciones enteras de:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 13, \quad 0 \leq z_i \leq 4, \ \forall\ i.$$

Ahora z_i representa la cantidad de bizcochos de tipo i, **adicionales** al bizcocho que ya asignamos a cada tipo. Formalmente hicimos el cambio de variable: $z_i = x_i - 1$.

Para contar la cantidad de soluciones enteras de este último problema, vamos a usar el PIE. El universo U lo definimos como el conjunto de soluciones enteras de:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 13, \quad z_i \geq 0, \ \forall\ i.$$

Por lo tanto, la cantidad de elementos del universo, es: $\boxed{|U| = \dfrac{(13+3)!}{13! \times 3!} = C_3^{16}}$.

Sobre este universo, imponemos cuatro condiciones, una por cada variable z_i. La condición c_i es: soluciones del universo con $z_i \geq 5$. Nuestro interés es calcular la cantidad de soluciones del universo que no cumplen ninguna de las condiciones. A esta cantidad la denotamos: $N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4)$. Por el PIE, sabemos que se cumple:

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4) = |U| - \sum_{i=1}^{4} N(c_i) + \sum_{1\leq i<j\leq 4} N(c_ic_j) - \sum_{1\leq i<j<k\leq 4} N(c_ic_jc_k) + N(c_1c_2c_3c_4).$$

$N(c_1)$ es la cantidad de soluciones enteras de:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 13, \quad z_1 \geq 5,\ z_2 \geq 0,\ z_3 \geq 0,\ z_4 \geq 0.$$

Haciendo el cambio de variable $y_1 = z_1 - 5$, esto equivale a contar la cantidad de soluciones enteras de:

$$y_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 13 - 5 = 8, \quad y_1 \geq 0,\ z_2 \geq 0,\ z_3 \geq 0,\ z_4 \geq 0.$$

Por lo tanto:

$$\boxed{N(c_1) = \frac{(8+3)!}{8! \times 3!} = C_3^{11}}.$$

Razonando de igual forma, se obtiene el mismo valor para $N(c_2), N(c_3)$ y $N(c_4)$.

$N(c_1c_2)$ es la cantidad de soluciones enteras de:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 13, \quad z_1 \geq 5,\ z_2 \geq 5,\ z_3 \geq 0,\ z_4 \geq 0.$$

Haciendo el cambio de variable $y_1 = z_1 - 5$, $y_2 = z_2 - 5$, esto equivale a contar la cantidad de soluciones enteras de:

$$y_1 + y_2 + z_3 + z_4 = 13 - 10 = 3, \quad y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ z_3 \geq 0,\ z_4 \geq 0.$$

Por lo tanto:

$$\boxed{N(c_1c_2) = \frac{(3+3)!}{3! \times 3!} = C_3^{6}}.$$

Razonando de igual forma, se obtiene el mismo valor para cada $N(c_ic_j)$, con $i < j$.

$N(c_1c_2c_3)$ es la cantidad de soluciones enteras de:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 13, \quad z_1 \geq 5,\ z_2 \geq 5,\ z_3 \geq 5,\ z_4 \geq 0.$$

Haciendo el cambio de variable $y_1 = z_1 - 5$, $y_2 = z_2 - 5$, $y_3 = z_3 - 5$, esto equivale a contar la cantidad de soluciones enteras de:

$$y_1 + y_2 + y_3 + z_4 = 13 - 15 = -2, \quad y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ z_4 \geq 0.$$

Este sistema no tiene ninguna solución, por lo que: $\boxed{N(c_1c_2c_3) = 0}$. Lo mismo ocurre con cualquier terna de condiciones, y con el caso de cuatro condiciones: $\boxed{N(c_1c_2c_3c_4) = 0}$.

Por lo tanto, por el PIE, la cantidad de soluciones del problema original, es:

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4) = |U| - \sum_{i=1}^{4} N(c_i) + \sum_{1\leq i<j\leq 4} N(c_ic_j) = C_3^{16} - 4C_3^{11} + 6C_3^{6} = 20.$$