

PRÁCTICO 4: PRINCIPIO DE INCLUSIÓN-EXCLUSIÓN, DESÓRdenes, FUNCIONES
SOBREYECTIVAS Y NÚMEROS DE STIRLING

Los **tres** ejercicios marcados con **asterisco** se pueden entregar para su corrección. Entregando los tres ejercicios pueden sumar hasta 2 puntos extra para aprobar o exonerar el curso.

Principio de Inclusión-Exclusión

Ejercicio 1.

- a. ¿Cuántos números naturales entre 1 y 105 inclusive no son múltiplos de 3, 5 ni 7?
- b. ¿Cuántos números naturales entre 1 y 1155 inclusive son múltiplos de 3 pero no de 5, 7 ni 11?

Ejercicio 2. Se tira un dado 6 veces. Hallar la cantidad de formas en que podemos obtener un múltiplo de 18 como suma de las 6 tiradas del dado. Tomar en cuenta el orden de los valores obtenidos en el dado. Por ejemplo, los resultados en orden $(6, 6, 2, 2, 1, 1)$ y $(6, 2, 6, 2, 1, 1)$ cuentan a favor como diferentes.

Cantidad de soluciones enteras de una ecuación lineal

Ejercicio 3. ¿De cuántas formas pueden extraerse 9 canicas de una bolsa que contiene exactamente 3 canicas blancas, 3 rojas, 3 azules y 3 negras?

Ejercicio 4. ¿Cuántos enteros positivos entre 1 y 99.999 inclusive cumplen que la suma de sus dígitos es igual a 15?

Ejercicio 5. Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27$ con las siguientes restricciones:

- a. $0 \leq x_i \leq 8$ para todo i .
- b. $[*] 1 \leq x_1 \leq 5, 1 \leq x_2 \leq 5, 3 \leq x_3 \leq 7$ y $3 \leq x_4 \leq 7$.
- c. $0 < x_1 \leq 4, 1 < x_2 < 5, 3 \leq x_3 \leq 7$ y $0 \leq x_4 \leq 8$.

Desórdenes

Ejercicio 6. Hallar la cantidad de permutaciones de los dígitos de 123456789 tales que:

- a. Ningún dígito está en su posición original.
- b. Los dígitos pares no están en su posición original.
- c. $[*]$ Los dígitos pares no están en su posición original y los primeros cuatro dígitos son precisamente 1, 2, 3 y 4, en algún orden.

Funciones Sobreyectivas y Números de Stirling

Ejercicio 7. Se tiran ocho dados distintos. De todos los resultados posibles, ¿en cuántos casos aparecen seis números distintos? Importa el orden en que se obtiene cada número.

Ejercicio 8. Seis perros y dos gatos tienen cuatro escondites (distintos) para guarecerse de la lluvia. ¿De cuántas formas pueden distribuirse los animales en los escondites sabiendo que se utilizan todos los escondites y que no pueden haber perros y gatos en el mismo escondite? *Sug.: separar en casos.*

Ejercicio 9. En el supermercado un cliente compra 9 artículos distintos, y pide que se los guarden en 4 bolsas (indistinguibles). ¿De cuántas formas se puede hacer, asumiendo que ninguna bolsa queda vacía?

Ejercicio 10. ¿De cuántas formas se puede factorizar el número $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ como producto de 2 factores positivos mayores que 1? ¿Y como producto de 3 factores positivos mayores que 1? En ambos casos el orden de los factores no importa.

Ejercicio 11. Probar las siguientes recurrencias para los números de Stirling de segunda especie y el número de funciones sobreyectivas, respectivamente.

a. Números de Stirling de segunda especie: $S(m+1, n) = S(m, n-1) + n \cdot S(m, n)$.
Sugerencia: separar en casos, según si el objeto 1 se asigna sólo o no.

b. Funciones Sobreyectivas: $Sob(m+1, n) = n \cdot (Sob(m, n-1) + Sob(m, n))$.
Sugerencia: usar el resultado del punto anterior.

Ejercicio 12. Probar las siguientes identidades usando la regla de la suma y del producto:

a. $[*] \quad n^m = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} Sob(m, i).$

b. $Sob(m, n) = \sum_{i=1}^{m-(n-1)} \binom{m}{i} Sob(m-i, n-1).$

c. $n! = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} d_i$, donde $d_0 = 1$ y d_i es el número de desórdenes de tamaño i .