

PRÁCTICO 3: COMBINACIONES CON REPETICIÓN Y TEOREMA DEL MULTINOMIO  
(SECCIÓN 1.4 Y 1.3 DEL GRIMALDI)

Los dos ejercicios marcados con **asterisco** se pueden entregar para su corrección.

**Distribuciones (o Combinaciones con repetición)**

**Ejercicio 1.** Hallar la cantidad de formas en que un maestro puede distribuir:

- 8 bizcochos de chocolate entre 3 estudiantes distintos (los bizcochos son indistinguibles).
- 8 bizcochos de chocolate y 7 de crema entre 3 estudiantes.
- Idem al punto anterior pero con la condición de que cada estudiante debe recibir al menos un bizcocho de cada tipo.

**Ejercicio 2.** Hallar la cantidad de maneras de distribuir:

- $r$  pelotitas rojas (indistinguibles) en  $n$  cajas diferentes.
- $2r$  pelotitas en  $n$  cajas diferentes, si la mitad de las pelotitas son rojas y la otra mitad son azules (las pelotitas de un mismo color se consideran indistinguibles entre sí).

**Ejercicio 3.** En cada caso hallar la cantidad de soluciones enteras no negativas ( $x_i \in \mathbb{Z}$ ,  $x_i \geq 0$ ).

- De la ecuación lineal  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$ .
- De la desigualdad  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$ .
- De la ecuación lineal  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ , que además cumplen:  $x_1 \geq 3$  y  $x_4 \geq 3$ .
- De la desigualdad  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 30$ .

Sugerencia: introducir una variable auxiliar para convertir la desigualdad en una igualdad.

**Ejercicio 4.** Expresar los resultados de las siguientes preguntas como una combinación con repetición.

- ¿Cuántas fichas hay en el juego de dominó? Cada ficha se compone de dos números del 0 al 6, sin distinguir el orden. Por ejemplo, la ficha 2|5 es igual a la ficha 5|2. Respuesta incorrecta:  $\frac{7 \times 7}{2!}$ .  
Sugerencia: modelar el problema mediante una ecuación lineal con siete variables.
- [\*] ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener al arrojar simultáneamente 5 dados idénticos? No importa el orden en que se obtiene cada número, sino cuáles son los cinco números obtenidos.

**Teorema del Multinomio**

En el desarrollo de  $(x_1 + x_2 + \dots + x_t)^n$ , el coeficiente que multiplica a  $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_t^{n_t}$ , es:  $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_t!}$ .  
Se asume  $n$  y  $t$  enteros positivos, y  $n_1, \dots, n_t$  naturales, tales que  $n_1 + n_2 + \dots + n_t = n$ .

**Ejercicio 5.** En cada caso, hallar el coeficiente que multiplica a:

- $x^4 y^5 z^5$  en el desarrollo de  $(x + y + z)^{14}$ .
- $x^4 y^5$  en el desarrollo de  $(x + y + 5)^{14}$ .
- $u^4 w^5$  en el desarrollo de  $(2u - w + 5)^{14}$ .

**Ejercicio 6.** [\*] Hallar el coeficiente de  $x^5$  en el desarrollo de  $(x^5 + 3x - 1)^{10}$ .

**Ejercicio 7.** Hallar el coeficiente de  $x^4$  en el desarrollo de  $(x^3 - x^2 + 3x - 2)^6$ .

## Cantidad de funciones y formas de contar

El objetivo del siguiente ejercicio es relacionar la cantidad de funciones de cierto tipo con las distintas formas de contar que hemos visto (permutaciones, arreglos, combinaciones, con y sin repetición).

**Ejercicio 8.** Dados  $A = \{1, 2, \dots, m\}$  y  $B = \{1, 2, \dots, n\}$ , hallar la cantidad de funciones  $f : A \rightarrow B$ , tales que:

- a. No hay restricciones.
- b.  $f$  es inyectiva.
- c.  $f$  es biyectiva.
- d.  $f$  es monótona creciente estrictamente.
- e.  $f$  es monótona creciente.