

PRÁCTICO 2: CONCEPTOS BÁSICOS DE COMBINATORIA
(SECCIONES 1.1, 1.2 Y 1.3 DEL GRIMALDI)

Los dos ejercicios marcados con **asterisco** se pueden entregar para su corrección.

Reglas del producto y de la suma

Ejercicio 1. La final de un campeonato de fútbol debe definirse por penales. Para patearlos, se deben elegir (en orden) 5 jugadoras diferentes de un total de 11. ¿De cuántas formas se puede hacer? Responder a la misma pregunta si la capitana del equipo patea el tercer penal.

Ejercicio 2. [*] Un alfabeto consta de 5 vocales y 22 consonantes. Queremos construir palabras con este alfabeto. Se admite que las palabras tengan letras repetidas.

- ¿Cuántas palabras de 3 letras se pueden formar?
- ¿Cuántas palabras de 3 letras se pueden formar, con la condición de que incluyan exactamente una vocal? *Sugerencia: separar en casos.*
- ¿Cuántas palabras de 5 letras se pueden formar, con la condición de que no tengan ni dos consonantes ni dos vocales juntas?

Ejercicio 3. Disponemos de cinco latas de pintura, cada una conteniendo un color distinto.

- ¿De cuántas formas se puede colorear una bandera de cuatro franjas horizontales con los cinco colores disponibles, de modo que franjas contiguas no tengan el mismo color?
- Ídem a la parte **a**, con la restricción de que el color de la primera y última franja sean distintos.

Ejercicio 4. ¿Cuántos enteros pares comprendidos entre 100 y 999 tienen sus 3 dígitos distintos?
Respuesta incorrecta: $5 \times 9 \times 7$.

Arreglos y Combinaciones (de objetos distintos)

Ejercicio 5. ¿De cuántas formas se puede elegir un presidente, un secretario y un tesorero dentro de un grupo de 12 personas?

Ejercicio 6. Un comité de 10 personas será elegido entre 8 hombres y 8 mujeres. De cuántas formas se puede hacer una selección si:

- | | |
|--------------------------------------|---|
| a. no hay restricciones; | c. deben haber más mujeres que hombres; |
| b. debe haber 5 hombres y 5 mujeres; | d. deben haber al menos 7 mujeres. |

Ejercicio 7. En una prueba de 10 preguntas, un estudiante decide responder exactamente 6 preguntas, y quiere que al menos 3 estén dentro de las primeras 5 preguntas. ¿De cuántas formas podría hacerlo?

Ejercicio 8. Para una selección de fútbol fueron convocados 2 goleros, 6 zagueros, 7 mediocampistas y 4 atacantes. ¿De cuántos modos es posible formar un equipo titular con un golero, 4 zagueros, 4 mediocampistas y 2 atacantes?

Ejercicio 9. Consideremos un mazo de 48 cartas españolas. Cada carta tiene asociado un valor (del 1 al 12) y un palo (oro, copa, espada o basto). A las cartas con valor 1 se las llaman **ases** y a las cartas con valor 10 se las llaman **sotas**. Un **par** consiste en dos cartas con el mismo valor. Calcular la cantidad de formas en que un jugador puede extraer 5 cartas (distintas) del mazo y obtener:

- a. 5 cartas del mismo palo.
- b. 4 ases.
- c. 4 cartas del mismo valor.
- d. 3 ases y 2 sotas.
- e. 3 ases y 1 par.

Permutaciones (de objetos distintos o repetidos)

Ejercicio 10. En cada caso, determinar cuántas palabras distintas se pueden formar.

- a. Permutando las letras de la palabra *ÁRBOL*.
- b. Permutando las letras de la palabra *ALGORITMO*. *Sugerencia: determinar primero la cantidad de formas de colocar las dos letras O, y luego la cantidad de formas de colocar las restantes letras.*
- c. Permutando las letras de la palabra *BANANA*.

Ejercicio 11. ¿De cuántas maneras diferentes puede un Rey, desplazarse desde la esquina inferior izquierda (a1) hasta la esquina superior derecha (h8) de un tablero de ajedrez, admitiendo únicamente movimientos hacia arriba o hacia la derecha (no se permite movimiento en diagonal)?

Ejercicio 12. Determine cuántas funciones $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ verifican que cada elemento i en $\{1, 2, 3\}$ tiene exactamente i preimágenes.

Teorema del Binomio y Triángulo de Pascal

Ejercicio 13. [*]

- a. Consideremos el conjunto $A = \{2, 5, 12\}$.
 - i) Hallar todos los subconjuntos de A . Recordar que el conjunto vacío $\emptyset$, y el propio conjunto A , se consideran subconjuntos de A .
 - ii) Determinar cuántos subconjuntos de A son de tamaño: 0, 1, 2 y 3. Expresar cada cantidad como una combinatoria.
 - iii) Expresar la cantidad total de subconjuntos de A como una suma de combinatorias.
- b. Sea A un conjunto con n elementos distintos.
 - i) Expresar la **cantidad** total de subconjuntos de A como una suma de combinatorias.
 - ii) Utilizando el Teorema del Binomio, simplificar la suma anterior a un único sumando.

Ejercicio 14. Hallar el valor de las siguientes sumas:

a. $\sum_{k=0}^{203} C_k^{203} (-4)^k.$

b. $\sum_{i=0}^n \frac{2^i}{(n-i)! \times i!}.$

c. $\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{(n-i)! \times i!}.$

Ejercicio 15. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, con $m \leq n$, considere la suma: $\sum_{i=m}^n C_m^i.$

- a. Dibuje las primeras 7 filas del triángulo de Pascal, y exprese el valor de cada elemento del triángulo como una combinatoria.

- b. Calcule la suma de las diagonales del triángulo de Pascal, y relacione el valor de cada suma con la sumatoria del inicio (y con algún otro valor del triángulo, expresado como combinatoria).
- c. Conjeture cuánto vale la suma en general y demuéstrela por Inducción en n (con m fijo). *Sugerencia: en el paso inductivo puede ser útil la **identidad de Pascal/Newton**.*