Matemática Discreta 1
Cenur Noreste, Sede Tacuarembó

Matías Valdés
matias.valdes (en) noreste.udelar.edu.uy

15 de agosto de 2025

Índice general

1. Inducción en los Naturales **5**
1.1. Notación 5
1.2. El principio del Buen Orden 5
1.3. Inducción Simple 6
1.4. Sucesiones en recurrencia 11
1.5. Inducción Fuerte 12

Capítulo 1

Inducción en los Naturales

Semana 1

1.1. Notación

El conjunto de los números naturales es: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. El conjunto de los números enteros es: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. El conjunto de los enteros **positivos** es:

$$\mathbb{Z}^+ = \{k \in \mathbb{Z} \ / \ k > 0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

Es decir: el conjunto de los enteros positivos coincide con el de los naturales: $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$. El conjunto de los números racionales es: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}, \ a, b \in \mathbb{Z}, \ b \neq 0\}$. También podemos definir el conjunto de los racionales positivos:

$$\mathbb{Q}^+ = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \ / \ \frac{a}{b} > 0\}.$$

En este curso vamos a trabajar principalmente con los números naturales. Estos cumplen una propiedad que los distingue del resto de los conjuntos anteriores: el denominado "principio del buen orden".

1.2. El principio del Buen Orden

Consideremos nuevamente el conjunto de los naturales:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Es claro que este conjunto tiene un elemento mínimo: el 1. No ocurre lo mismo con los enteros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, ni con los racionales positivos $\mathbb{Q}^+$. De hecho, los naturales cumplen una propiedad más fuerte que la existencia de un elemento mínimo: el principio del buen orden.

Proposición 1 (Principio del buen orden). *Cualquier subconjunto **no vacío** de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo. Decimos que $\mathbb{N}$ es un conjunto "bien ordenado".*

Ejemplo 1. *Consideremos el subconjunto de los naturales pares (múltiplos de 2):*

$$X = \{2, 4, 6, 8, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}.$$

Este es un subconjunto de los naturales, y además es no vació. Por lo tanto, por el principio del buen orden, podemos afirmar que X tiene que tener un elemento mínimo. Es sencillo ver que 2 es el elemento mínimo de X.

El principio del buen orden es la base del método de Inducción Matemática.

1.3. Inducción Simple

Teorema 1 (Inducción Simple). *Sea $P(n)$ una proposición, en la que aparece una o varias veces la variable n, que representa a un número natural. Supongamos que se cumple:*

1. ***Paso base:** $P(1)$ es verdadera, y*

2. ***Paso inductivo:** si tomamos un entero $k \geq 1$ cualquiera, y asumimos que $P(k)$ es verdadera, somos capaces de probar que $P(k+1)$ es verdadera.*

Si se cumplen estas condiciones, el Teorema de Inducción garantiza que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq 1$.

Una forma de interpretar el Teorema de Inducción es mediante una analogía con las fichas de dominó. Supongamos que colocamos una ficha de dominó por cada número natural, una detrás de otra. En este caso la proposición $P(n)$ es que se cae la ficha que está en el lugar n. Probar que $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq 1$, equivale a probar que se caen todas las fichas. Para probar que se caen todas las fichas, basta con probar que:

1. **paso base:** se cae la ficha de la posición 1, y

2. **paso inductivo:** si se cae la ficha de la posición k, entonces se cae la ficha que le sigue, ubicada en la posición $k+1$.

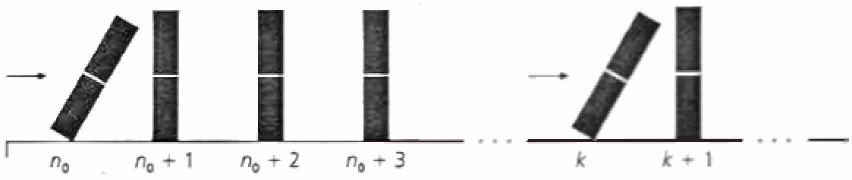

Figura 1.1: Analogía entre Inducción y la caída de fichas de dominó. Imagen: Grimaldi.

Notar que necesitamos ambos pasos para que se caigan todas las fichas. En efecto:

1. Si solamente se cae la ficha 1 (paso base), podría ocurrir que no se caiga la ficha 2. Esto puede ocurrir, por ejemplo, si el largo de la ficha 1 es tan pequenño que al caer no alcance a tocar a la ficha 2.

2. Por otro lado, si solamente podemos probar que cada vez que se cae la ficha k, se cae la siguiente $k+1$ (paso inductivo), nada nos garantiza que se caiga la ficha 1 como para iniciar el proceso de caída de las demás fichas.

La prueba del Teorema de Inducción se basa en el Principio del Buen Orden de los naturales. Antes de ver esta prueba, veamos un ejemplo de cómo podemos utilizar el teorema de Inducción Matemática.

Ejemplo 2. *Probar que todo entero positivo $n \geq 1$ cumple la siguiente propiedad $P(n)$:*

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Vamos a probar este resultado utilizando el Teorema de Inducción.

Demostración.

- **Paso base:** tenemos que probar que la propiedad se cumple para $n = 1$. Es decir, tenemos que probar que se cumple:

$$\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2}.$$

El lado izquierdo de la igualdad es: $\sum_{i=1}^{1} i = 1$. Por otro lado, el lado derecho vale: $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Como $1 = 1$, esto prueba que la propiedad vale para $n = 1$.

- **Paso inductivo:** en este paso consideramos un entero positivo $k \geq 1$ cualquiera, y suponemos que se cumple la propiedad para $n = k$. Es decir, suponemos que se cumple la igualdad:

$$\sum_{i=1}^{k} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + (k-1) + k = \frac{k(k+1)}{2}. \tag{1.1}$$

Asumiendo esto, tenemos que probar que la propiedad se cumple para $n = k + 1$. Es decir, tenemos que probar que se cumple:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + (k-1) + k + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}. \tag{1.2}$$

Para probar esto, lo que podemos hacer es partir de la igualdad (1.1), que sabemos que es cierta, y sumar $k+1$ de ambos lados. De esta forma obtenemos:

$$(1+2+3+\ldots+(k-1)+k)+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1).$$

El lado izquierdo coincide con el de la ecuación (1.2), que es la que estamos intentando probar. Veamos que el lado derecho también. Haciendo cuentas se obtiene:

$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Por lo tanto, por el Teorema de Inducción, podemos concluir que la propiedad $P(n)$ se cumple para todo entero $n \geq 1$. □

Ahora sí, veamos la prueba del Teorema de Inducción matemática, que se basa en el principio del buen orden.

Demostración. (Del Teorema de Inducción matemática) Consideremos el conjunto de números naturales para los que la propiedad es falsa:

$$F := \{t \in \mathbb{N} \ / \ P(t) \text{ es falsa}\} \subseteq \mathbb{N}.$$

Probar que $P(n)$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$, equivale a probar que F es un conjunto vació: $F = \emptyset$ (la propiedad nunca es falsa). Vamos a probar esto último.

Razonemos por absurdo, y supongamos que $F \neq \emptyset$. Como F es un subconjunto de los naturales, y es no vacío, por el **principio del buen orden**, podemos afirmar que F tiene un elemento mínimo, que denotamos mediante s. En particular $s \in F$, lo cual implica que no se cumple $P(s)$ (por definición de F).

La hipótesis (1) dice que $P(1)$ es verdadera. Por lo tanto s no puede ser igual a 1. Entonces $s > 1$. Esto implica: $s-1 > 0$. Es decir: $s-1 \geq 1$.

A su vez, como $s-1 < s$, tiene que cumplirse $s-1 \notin F$ (pues de lo contrario s no sería mínimo de F). Por definición de F, esto quiere decir que se cumple $P(s-1)$.

Por lo tanto, como $s-1 \geq 1$ y se cumple $P(s-1)$, la hipótesis (2) permite afirmar que se cumple $P((s-1)+1) = P(s)$. Esto implica $s \notin F$, lo cual es absurdo pues $s \in F$. □

Observación 1. *En el paso base del Teorema de Inducción, se puede utilizar otro entero en lugar del 1. Por ejemplo, se puede comenzar probando que se cumple $P(5)$. En este caso, el paso inductivo se debe probar para cualquier $k \geq 5$, y la propiedad $P(n)$ quedará probada para todo $n \geq 5$. Al entero utilizado en el paso base se lo denota mediante n_0.*

Ejemplo 3. *Probar que $2^n \geq 3n$, para todo entero positivo $n \geq 4$.*

Vamos a probar este resultado utilizando el teorema de inducción. Notar que en este caso no vamos a probar la propiedad para $n \geq 1$, sino para $n \geq 4$. De hecho la propiedad no se cumple para $n = 3$, pues: $2^3 = 8 < 3 \times 3 = 9$.

Demostración.

- **Paso base:** tenemos que probar que la propiedad se cumple para $n = 4$. Es decir, tenemos que probar que se cumple: $2^4 \geq 3 \times 4$. Esto equivale a probar que se cumple $16 \geq 12$, lo cual sabemos que es cierto.

- **Paso inductivo:** en este paso consideramos un entero positivo $k \geq 4$, y suponemos que se cumple la propiedad para $n = k$. Es decir, suponemos que se cumple la desigualdad:

$$2^k \geq 3k. \tag{1.3}$$

  Asumiendo esto, tenemos que probar que la propiedad se cumple para $n = k + 1$. Es decir, tenemos que probar que se cumple:

$$2^{k+1} \geq 3(k + 1) = 3k + 3. \tag{1.4}$$

  Para probar esto, lo que podemos hacer es partir de la desigualdad (1.3), que sabemos que es cierta, y multiplicar por 2 de ambos lados. De esta forma obtenemos:

$$2^k \geq 3k \Rightarrow (2^k)2 \geq (3k)2 = 6k.$$

  El lado izquierdo se puede expresar como: $2^k 2 = 2^{k+1}$. Es decir que el lado izquierdo coincide con el de la desigualdad (1.4), que es la que estamos intentando probar. Por lo tanto, ya tenemos probada la siguiente desigualdad:

$$2^{k+1} \geq 6k.$$

  Resta probar que el lado derecho cumple: $6k \geq 3k + 3$. Esto último es cierto pues:

$$6k \geq 3k + 3 \Leftrightarrow 3k \geq 3 \Leftrightarrow k \geq 1;$$

  y esto último es cierto dado que estamos asumiendo $k \geq 4$.

Por lo tanto, por el Teorema de Inducción, podemos concluir que la propiedad se cumple para todo entero $n \geq 4$. □

Observación 2. *En el ejemplo anterior, para probar el paso inductivo, sólo fue necesario asumir $k \geq 1$. Es decir que el paso inductivo es cierto para todo entero $k \geq 1$. Sin embargo, esto no significa que la propiedad $P(n)$ se cumpla para todo entero $n \geq 1$, porque ya vimos que el paso base no se cumple para $k = 1$.*

Ejemplo 4. *Probar que* $9^n - 1$ *es múltiplo de 8, para todo entero positivo* $n \geq 2$.

Vamos a probar este resultado utilizando el Teorema de Inducción.

Demostración.

- **Paso base:** tenemos que probar que la propiedad se cumple para $n = 2$. Es decir, tenemos que probar que $9^2 - 1$ es múltiplo de 8. Esto es cierto pues:

$$9^2 - 1 = 81 - 1 = 80 = 8 \times 10.$$

- **Paso inductivo:** en este paso consideramos un entero positivo $k \geq 2$, y suponemos que se cumple la propiedad para $n = k$. Es decir, suponemos que

$$\left(9^k - 1\right) \text{ es múltiplo de 8.} \tag{1.5}$$

Asumiendo esto, tenemos que probar que la propiedad se cumple para $n = k + 1$. Es decir, tenemos que probar que se cumple:

$$\left(9^{k+1} - 1\right) \text{ es múltiplo de 8.} \tag{1.6}$$

Para probar esto, lo que podemos hacer es partir de la afirmación (1.5), que sabemos que es cierta. Esta afirmación equivale a decir que existe un entero q, tal que: $9^k - 1 = 8 \times q$. Ahora multiplicamos por 9 de ambos lados, y obtenemos:

$$(9^k - 1) \times 9 = (8q) \times 9 \Rightarrow (9^k) \times 9 - 9 = (8q) \times 9 \Leftrightarrow 9^{k+1} - 9 = 8(q \times 9).$$

Sumando 8 de ambos lados, se obtiene:

$$\left(9^{k+1} - 9\right) + 8 = 8(q \times 9) + 8 \Leftrightarrow 9^{k+1} - 1 = 8(q \times 9) + 8 = 8(q \times 9 + 1).$$

Esto prueba que $9^{k+1} - 1$ es múltiplo de 8, como queríamos.

□

Por lo tanto, por el Teorema de Inducción, podemos concluir que la propiedad $P(n)$ *se cumple para todo entero* $n \geq 2$.

Ejercicio 1. *Consideremos la suma de los enteros positivos impares consecutivos. Por ejemplo, la suma de los primeros 4 impares es:* $1 + 3 + 5 + 7 = 16$.

1. *Conjeturar una expresión para la suma de los primeros* n *enteros positivos impares consecutivos:*

$$\sum_{i=0}^{n-1}(2i + 1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n - 3) + (2n - 1) =?$$

Sugerencia: analizar cómo es la suma para $n = 2, 3, 4, 5$.

2. *Utilizando inducción, probar que la conjetura es válida para todo* $n \geq 1$.

1.4. Sucesiones en recurrencia

Semana 2

Definición 1. *Una sucesión es una función que a cada número natural* $n \in \mathbb{N}$ *le asocia un número real* $a_n \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 5. *Consideremos la sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *definida como:* $a_n = \frac{n^2}{3}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. *Los primeros valores de esta sucesión son:*

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}, \quad a_3 = \frac{3^2}{3} = 3, \quad a_4 = \frac{4^2}{3} = \frac{16}{3}, \quad \ldots.$$

Por como está definida la sucesión, resulta sencillo determinar su valor para cualquier número natural n. *Por ejemplo, el valor de la sucesión en* $n = 100$, *es:* $a_{100} = \frac{100^2}{3} = \frac{10000}{3}$.

En el ejemplo anterior la sucesión queda definida mediante una expresión que depende explícitamente de la variable natural n. Existe una forma alternativa de definir una sucesión, que es mediante una expresión en recurrencias.

Ejemplo 6 (Sucesión de Fibonacci)**.** *Consideremos la sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *definida en forma recurrente:*

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \;\; \forall\, n \in \mathbb{N};$$

con valores iniciales: $a_0 = 1$ *y* $a_1 = 1$. *Es decir: el valor de la sucesión en el natural* $n+1$, *se obtiene sumando los dos valores anteriores de la sucesión. Por ejemplo:*

$$\textit{usando } n = 1 \textit{ en la recurrencia, se obtiene:} \quad a_2 = a_1 + a_0 = 1 + 1 = 2.$$

Con este nuevo valor podemos obtener el siguiente:

$$\textit{usando } n = 2 \textit{ en la recurrencia:} \quad a_3 = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3.$$

Y el siguiente:

$$\textit{usando } n = 3 \textit{ en la recurrencia:} \quad a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5.$$

Así podemos seguir hasta el valor de n *que queramos. Esto genera una sucesión muy* *conocida, que se conoce como sucesión de Fibonacci. Sus primeros valores son:*

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots.$$

En el ejemplo anterior, si nos piden calcular a_{100}, primero tenemos que calcular todos los valores desde a_2 hasta a_{99}, porque $a_{100} = a_{99} + a_{98}$. Esta es una desventaja de las sucesiones definidas mediante una recurrencia. Más adelante en el curso veremos cómo "resolver" una sucesión en recurrencia. Esto quiere decir: convertir la recurrencia en una expresión que dependa explícitamente del natural n, como teníamos en el ejemplo inicial.

1.5. Inducción Fuerte

El Teorema de Inducción Fuerte, que vamos a introducir en esta sección, es matemáticamente equivalente al Teorema de Inducción Simple que vimos antes. Esto es: todo lo que se puede probar con uno, se puede probar con el otro. Sin embargo, en la práctica, cierto tipo de ejercicios se pueden resolver más fácilmente utilizando Inducción Fuerte.

Observación 3. *En color azul se marcan las partes que incorpora el Teorema de Inducción Fuerte, en relación al Teorema de Inducción Simple.*

Teorema 2 (Inducción Fuerte)**.** *Sea $P(n)$ una proposición en la que aparece una o varias veces la variable n, que representa a un número natural. Supongamos que se cumple:*

1. ***Paso base:*** $P(1), P(2), \ldots, P(n_1)$ *son verdaderas (para cierto natural $n_1 \geq 1$), y*

2. ***Paso inductivo:*** *si fijamos $k \geq n_1$, y asumimos que se cumplen*

$$P(1), P(2), \ldots, P(k-2), P(k-1), P(k),$$

   somos capaces de probar que se cumple $P(k+1)$.

Si se cumplen ambas condiciones, el Teorema de Inducción Fuerte garantiza que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq 1$.

Demostración. No lo vamos a probar en este curso. □

Observación 4. *El Teorema de Inducción Fuerte agrega más hipótesis al paso inductivo, en relación a Inducción Simple (asume una hipótesis más fuerte que la de Inducción Simple). Es por eso que se denomina Inducción "Fuerte", y no por que se puedan probar más cosas con esta versión del Teorema de Inducción.*

Ejemplo 7 (Ejercicio 24 de la sección 4.1 del Grimaldi)**.** *Consideremos la siguiente sucesión definida mediante una recurrencia, con dos valores iniciales:*

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 3.$$

Notar que la recurrencia es la misma que la de la sucesión de Fibonacci. Lo que cambia son los valores de las condiciones iniciales. Los primeros valores de esta sucesión son:

$$a_3 = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3, \quad a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5, \quad a_5 = 5 + 3 = 8, \quad \ldots .$$

Supongamos que queremos probar que la sucesión cumple la siguiente desigualdad:

$$a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n, \quad \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

Esta desigualdad es una propiedad que depende de n, por lo que podemos intentar aplicar inducción para probarla. Vamos a utilizar Inducción Fuerte (ya veremos por qué).

1. ***Paso base:*** *para $n = 1$, hay que probar que se cumple: $a_1 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^1$. Esta desigualdad es cierta, pues: $\frac{7}{4} = 1{,}75 > 1$.*

   Como estamos usando Inducción Fuerte, en el paso base tenemos que probar que se cumplen $P(1), P(2), \ldots, P(n_1)$; hasta cierto n_1 que no conocemos. En general, el valor de n_1 lo vamos a identificar en el paso inductivo. Por lo tanto, por el momento sólo vamos a probar $P(1)$ en el paso base.

2. ***Paso inductivo:*** *en este paso fijamos $k \geq n_1$ genérico, y asumimos que la desigualdad se cumple para $n = 1, 2, 3, \ldots, k-2, k-1, k$. Asumiendo esto, tenemos que probar que la desigualdad se cumple para $n = k + 1$. Es decir: tenemos que probar que se cumple:*

   $$a_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}.$$

   *Por definición: $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$. Por hipótesis de Inducción **Fuerte**, sabemos que en particular se cumple la desigualdad para $n = k - 1$ y $n = k$. Es decir, se cumple:*

   $$a_{k-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}, \quad a_k < \left(\frac{7}{4}\right)^k.$$

   Usando esto, podemos acotar el valor de a_{k+1}:

   $$a_{k+1} = a_k + a_{k-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}.$$

Haciendo cuentas, el término de la derecha se puede reescribir como:

$$\left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^k \left(\frac{7}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^k \left(1 + \frac{4}{7}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^k \left(\frac{11}{7}\right).$$

Finalmente, como $\frac{11}{7} \simeq 1{,}571 < \frac{7}{4} = 1{,}75$*, se obtiene la desigualdad buscada:*

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^k \left(\frac{11}{7}\right) < \left(\frac{7}{4}\right)^k \left(\frac{7}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}.$$

3. ***Volviendo al paso base:*** *en el paso inductivo fijamos* $k \geq n_1$*, y asumimos que la propiedad se cumple para* $1, 2, \ldots, k-2, k-1, k$*. En particular, fue suficiente con utilizar la propiedad para* $k-1$ *y* k*. Esto requiere que se cumpla:* $k - 1 \geq 1$ *(*$k-1$ *a la derecha o igual a 1); lo que equivale a* $k \geq 2$*. Es decir: en el paso inductivo fue necesario asumir* $k \geq 2$*. Por lo tanto, podemos tomar* $n_1 = 2$*. Esto implica que en el paso base basta con probar que se cumplen* $P(1)$ *y* $P(2)$*.*

   Ya probamos que se cumple $P(1)$*. Por lo tanto, resta probar que se cumple* $P(2)$*. Se tiene:* $\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \simeq 3{,}06 > 2 = a_2$*; lo cual prueba que se cumple* $P(2)$*.*

4. ***En resumen:*** *Dado que se cumplen el paso base y el paso inductivo, el Teorema de Inducción Fuerte permite concluir que se cumple la desigualdad para todo* $n \geq 1$*.*

5. ***Comentarios:*** *Con Inducción **Simple** no hubiese sido posible acotar el valor de* a_{k-1}*, porque la hipótesis de inducción **Simple** solamente garantiza que se cumple la desigualdad para* $n = k$ *(solamente garantiza que se cae la ficha* k*). Inducción **Fuerte** sí permite acotar* a_{k-1}*, porque permite asumir que se cumple* $P(k-1)$*, además de* $P(k)$*.*

Veamos otro ejemplo del uso de Inducción Fuerte.

Ejemplo 8. *Un cajero automático sólo tiene billetes de \$2 y de \$5. Mostrar que se puede extraer cualquier suma de dinero* $n \in \mathbb{N}$*, siempre que sea* $n \geq 4$*.*

En términos matemáticos, nos piden probar que, para todo $n \geq 4$*, existen dos naturales* i, j*, tales que:* $n = 2i + 5j$*. El* i *representa la cantidad de billetes de \$2 que utilizamos para formar el valor* n*, y el* j *la cantidad de billetes de \$5. Vamos a probar este resultado mediante Inducción Fuerte.*

1. ***Paso base:*** *para* $n = 4$*, podemos escribir:* $4 = 2 \times 2 + 5 \times 0$*. Lo dejamos por acá hasta identificar el valor de* n_1*.*

2. ***Paso inductivo:*** *fijamos* $k \geq n_1$*, y suponemos que se cumplen*

$$P(4), P(5), \ldots, P(k-2), P(k-1), P(k).$$

*Queremos probar que se cumple $P(k+1)$. Es decir, queremos probar que existen naturales i, j, tales que: $k+1 = 2i+5j$. Por hipótesis de Inducción **Fuerte**, sabemos que en particular se cumple $P(k-1)$. Es decir, existen naturales I, J, tales que:*

$$k - 1 = 2I + 5J.$$

Sumando 2 de ambos lados, se obtiene:

$$k + 1 = (2I + 5J) + 2 = 2\,(I + 1) + 5J.$$

Esto prueba que se cumple $P(k+1)$. En particular $i = I+1$, $j = J$.

3. ***Volviendo al paso base:** En el paso inductivo asumimos que se cumple $P(4)$, $P(5), \ldots, P(k-2)$, $P(k-1)$, $P(k)$, y utilizamos que se cumple $P(k-1)$. En particular, esto requiere asumir $k-1 \geq 4$, lo que equivale a $k \geq 5$. Es decir: en el paso inductivo fue necesario asumir $k \geq 5$. Por lo tanto, en el paso base podemos tomar $n_1 = 5$, y probar $P(4)$ y $P(5)$.*

   Resta probar $P(5)$. Esto es inmediato pues: $5 = 2 \times 0 + 5 \times 1$.

4. ***En resumen:** Dado que se cumplen el paso base y el paso inductivo, el Teorema de Inducción Fuerte permite concluir que se cumple la propiedad $P(n)$ para todo $n \geq 1$.*

Bibliografía

[1] Grimaldi, R. P. (1997). Matemáticas discretas y combinatoria: una introducción con aplicaciones. Pearson Educación. Tercera edición.