PRÁCTICO 1: INDUCCIÓN (SECCIÓN 4.1 DEL GRIMALDI)

Los ejercicios marcados con **asterisco** se pueden entregar para su corrección.

1. Símbolo de sumatoria

Ejercicio 1. Calcular el valor de las siguientes sumas:

$$\sum_{i=2}^{5}(3i+2), \quad \sum_{s=-2}^{3}(s^2-1), \quad \sum_{k=2}^{5}\frac{3}{k}, \quad \sum_{i=2}^{5}4.$$

Ejercicio 2. Expresar las siguientes sumas utilizando el símbolo de sumatoria (no se pide calcular el valor de la suma):

a. $2+4+8+16+32+64+128$.

b. $1+4+9+16+25+36+49$

c. $1-4+9-16+25-36+49$

d. $1+3+5+7+9+11+13$ (suma de los primeros 7 impares).

e. $3n+4n+5n+\ldots+(n-1)n+n^2$, $n \in \mathbb{N}$ cualquiera.

2. Inducción Simple

Ejercicio 3. [*] Probar que para todo natural n se cumple:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ejercicio 4. Probar, utilizando inducción, que para todo entero $n \geq 3$, se cumple: $n^2 \geq 2n+1$.

Ejercicio 5. Probar que existe un entero positivo n_0, tal que: $2^n \geq n^2$, para todo $n \geq n_0$.

Ejercicio 6. Probar que para todo entero positivo n se cumple: $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5.

Ejercicio 7. Probar que $7^{2025}-1$ es múltiplo de 6. *Sugerencia: probar primero una propiedad para todo entero positivo.*

Ejercicio 8. Probar que para todo entero positivo $n \geq 2$ se cumple: $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n} > n$.

Ejercicio 9. Supongamos que disponemos de monedas de \$3 y de \$8 (tantas como queramos). Probar que siempre podemos pagar un monto de n pesos con este tipo de monedas, asumiendo $n \geq 14$ pesos. Por ejemplo, si tenemos que pagar $n = \$25$, podemos usar dos monedas de \$8 y 3 monedas de \$3:

$$\$25 = \$8 \times 2 + \$3 \times 3.$$

Ejercicio 10. Probar que la siguiente desigualdad es válida para todo entero $n \geq 1$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \leq \frac{n}{2} + 1.$$

Ejercicio 11. [Espiral de Teodoro] Probar que a partir de un segmento de longitud 1 en el plano, es posible construir, para cada entero positivo n, un segmento de longitud $\sqrt{n}$, empleando únicamente regla y compás.

Ejercicio 12. Probar que la cantidad de diagonales de un polígono de n lados es: $\frac{n(n-3)}{2}$, $\forall\, n \geq 4$.

3. Inducción Fuerte y Sucesiones en Recurrencia

Ejercicio 13. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ la sucesión definida por las condiciones iniciales $a_1 = 5$, $a_2 = 13$, y por la recurrencia:

$$a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+,\ n \geq 2.$$

a. Calcular el valor de a_3 y a_4.

b. Probar que se cumple: $a_n = 2^n + 3^n,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$.

Ejercicio 14. [*] Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ la sucesión definida por las condiciones iniciales $a_1 = 3$, $a_2 = 10$, $a_3 = 30$, y por la recurrencia:

$$a_{n+1} = 2a_n + 7a_{n-1} + a_{n-2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+,\ n \geq 3.$$

Probar que se cumple: $a_n \geq 3^n,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$.

Ejercicio 15. [Ejemplo 4.13 del Grimaldi] Después de transcurrir n meses en un experimento de invernadero, el número p_n de plantas (de un tipo particular), satisface las siguientes ecuaciones:

$$p_0 = 3,\ p_1 = 7, \quad p_n = 3p_{n-1} - 2p_{n-2},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

Por ejemplo, tomando $n = 2$ en la expresión anterior, se obtiene la cantidad de plantas en el segundo mes del experimento:

$$p_2 = 3p_1 - 2p_0 = 3 \times 7 - 2 \times 3 = 15.$$

Probar que la cantidad de plantas p_n, en el mes número n del experimento, es:

$$p_n = 2^{n+2} - 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 0.$$

Ejercicio 16. Probar que todo entero $n \geq 2$ es primo o es producto de dos o más números primos.