**Universidad de la República** **Geometría y Álgebra Lineal 2**
**Facultad de Ingeniería - IMERL** **Segundo semestre 2025**

# PRÁCTICO 8: OPERADORES ORTOGONALES Y UNITARIOS.

Recuerda: Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), entonces:

- $\mathbb{K}_n[x]$ denota el espacio de polinomios de grado menor $n+1$ con coeficientes en $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ denota el espacio de matrices con coeficientes en $\mathbb{K}$ de $m$ filas y $n$ columnas.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.
- A menos que se indique lo contrario, considera en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{C}^n$ los productos internos usuales, en $\mathbb{R}_n[x]$ el producto interno $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, y en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ el producto interno $\langle A,B\rangle = tr(AB^t)$.

## 1. Operadores ortogonales, operadores unitarios e isometrías.

EJERCICIO 1. Prueba que las siguientes transformaciones lineales son isometrías e investiga si son sobreyectivas.

a.
$$T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}^2 \ / \ T(a+bx) = \left(a + \frac{b}{2}, \frac{b}{2\sqrt{3}}\right)$$

b.
$$T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4 \ / \ T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \left(\frac{-a+2b+2c}{3}, \frac{2a-b+2c}{3}, \frac{2a+2b-c}{3}, d\right)$$

c.
$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \ / \ T(x,y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2.

a. Prueba que $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por
$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix}.$$
es ortogonal.

b. Prueba que $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dada por $T(1,1) = (-i,i)$ y $T(1,-1) = (i,i)$ es unitaria.

c. Se considera $\mathbb{R}^4$ con el producto interno habitual y $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por
$$T(2,2,2,2) = (4,0,0,0), \qquad T(2,0,2,2) = (3,-1,1,1),$$
$$T(2,2,0,2) = (3,1,-1,1), \qquad T(2,2,2,0) = (3,1,1,-1).$$
Investiga si $T$ es ortogonal.

EJERCICIO 3. Prueba que la composición de transformaciones lineales unitarias (ortogonales) es unitaria (ortogonal).

EJERCICIO 4. ¿Existe un operador unitario $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ que cumpla que $T(1,1) = e^{i(2+i)}(1,1)$?

EJERCICIO 5. Sea $V$ un espacio vectorial con producto interno sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$) y $T$ un operador lineal en $V$. Prueba las propiedades que se enuncian a continuación:

a. Si $T$ es autoadjunto y unitario (u ortogonal) $\Rightarrow T^2 = Id$.
b. Si $T$ es autoadjunto y $T^2 = Id \Rightarrow T$ es unitario (u ortogonal).
c. Si $T$ es unitario (u ortogonal) y $T^2 = Id \Rightarrow T$ es autoadjunto.

EJERCICIO 6. Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$) y $S \subset V$ un subespacio no trivial.

a. Prueba que si $T$ es un operador unitario en $V$ y $S$ es invariante bajo $T$, entonces $T|_S$ es un operador unitario (u ortogonal) en $S$.
b. Prueba que si $T : S \to V$ es una transformación lineal tal que $\|T(s)\| = \|s\| \ \ \forall s \in S$, entonces existe un operador unitario (u ortogonal) $\widetilde{T} : V \to V$ tal que $\widetilde{T}(s) = T(s) \ \ \forall s \in S$.

EJERCICIO 7. Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ un operador lineal tal que $T(1,0,0) = (1,0,0)$, $T(0,1,0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,i,i)$ y $T(0,0,1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones justificando las respuestas.

a. $T$ es unitaria.
b. $T$ preserva la norma.
c. $T|_S : S \to S$ es unitaria donde $S = \{(x,y,z) : x = 0\}$.

## 2. Representaciones matriciales: matrices ortogonales y matrices unitarias

EJERCICIO 8.

a. Halla todas las matrices ortogonales cuya primera columna sea colineal con $(1,1)$.
b. Halla todas las matrices unitarias cuya primera columna sea colineal con $(1, 1-i)$.

EJERCICIO 9. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Prueba que $A$ es ortogonal $\Leftrightarrow A^t$ es ortogonal.
b. Deduce que $A$ es ortogonal $\Leftrightarrow$ sus filas forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, considerado con el producto interno habitual.
c. Enuncia y demuestra el resultado análogo para matrices complejas unitarias.

EJERCICIO 10.

a. ¿Es cierto que la matriz $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & e^{-i\theta} \\ ie^{i\theta} & -ie^{-i\theta} \end{pmatrix}$ es unitaria para todo $\theta \in \mathbb{R}$? Justifica tu respuesta.
b. Muestra que si $P$ es una matriz ortogonal entonces $e^{i\theta}P$ es unitaria para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 11. Demuestra que las matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es unitaria y encuentra una matriz $D$ diagonal y una matriz $P$ unitaria tal que $A = PD\overline{P}^t$.

EJERCICIO 12.

a. Verifica que la matriz $A$ es unitaria y encuentra una matriz unitaria $P$ tal que $D = \overline{P}^t AP$ sea diagonal.

$$\text{(i)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(ii)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(iii)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b. Observa que las matrices de las partes (ii) y (iii) son ortogonales. ¿Existe una matriz ortogonal $P$ tal que $D = P^t A P$ sea diagonal?

EJERCICIO 13.

A. Sea $\theta \in \mathbb{R}$, se considera en $\mathbb{R}^2$ con el producto interno usual, el operador $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$_{\mathcal{C}}(R_\theta)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

*a*) Prueba que $R_\theta$ es ortogonal $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

*b*) Determina los valores de $\theta \in \mathbb{R}$ para los cuales $R_\theta$ es diagonalizable.

B. Se considera, en $\mathbb{C}^2$ con el producto interno usual, el operador lineal $U$ dado por:

$$U(1, i) = \left(e^{i\theta}, ie^{i\theta}\right) \qquad \text{y} \qquad U(1, -i) = \left(e^{-i\theta}, -ie^{-i\theta}\right).$$

a. Prueba que $U$ es unitario.

b. Halla una base ortonormal de $\mathbb{C}^2$ en la cual $U$ se diagonaliza.

c. Tomando combinaciones lineales de $(1, i)$ y $(1, -i)$ construye una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^2$ cuyas componentes sean reales y además verifique

$$_{\mathcal{B}}(U)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$