<u>PRÁCTICO 4</u>: PRODUCTO INTERNO, NORMA INDUCIDA Y ORTOGONALIDAD..

<u>Recuerda</u>: Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), entonces:

- $\mathbb{K}_n[x]$ denota el espacio de polinomios de grado menor $n+1$ con coeficientes en $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ denota el espacio de matrices con coeficientes en $\mathbb{K}$ de m filas y n columnas.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

1. Producto interno y norma inducida.

EJERCICIO 1. En cada caso, prueba que $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ es un producto interno en V.

1. $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle (x,y,z),(x',y',z')\rangle = xx' + 2yy' + 3zz'$.
2. $V = \mathbb{C}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, y $\langle (x,y),(x',y')\rangle = (x \ \ y)\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{x'} \\ \overline{y'} \end{pmatrix}$
3. $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle A,B\rangle = tr\left(AB^t\right)$. ¿Es posible *ajustar* este producto interno para que funcione para las matrices complejas? ¿Cómo?

EJERCICIO 2. En cada caso, prueba que $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ **no** es un producto interno en V.

1. $V = \mathbb{R}_3[x]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle p,q\rangle = p(1)q(1)$.
2. $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle (x,y),(x',y')\rangle = x\left|x'\right| + y\left|y'\right|$.
3. $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle (a,b),(c,d)\rangle = ac - bd$.
4. $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle A,B\rangle = tr\,(A+B)$.
5. $V = C[0,1]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle f,g\rangle = \int_0^{1/2} f(t)g(t)dt$.

EJERCICIO 3. Indica si las siguientes afirmaciones sobre un espacio vectorial con producto interno son verdaderas o falsas. Justifica tus respuestas.

1. Un producto interno es lineal en ambas componentes.
2. $\langle v_1+v_2, w_1+w_2\rangle = \langle v_1,w_1\rangle + \langle v_2,w_2\rangle\ \ \forall\ v_1,v_2,w_1,w_2 \in V$.
3. Si $\langle v,w\rangle = 0\ \forall\ w \in V$, entonces $v = \mathbf{o}$.

EJERCICIO 4. Sea $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un producto interno cualquiera.

1. Prueba que existe una matriz $A := (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\forall \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $\forall \vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

   se satisface $\langle \vec{X},\vec{Y}\rangle = \vec{X}^t A \vec{Y}$. Para la prueba, observa que si $\mathcal{E} = \{e_1,...,e_n\}$ es base canónica de $\mathbb{R}^n$, entonces $\vec{X} = \sum_{i=1}^{i=n} a_i^X.e_i$ e $\vec{Y} = \sum_{j=1}^{ij=n} a_j^Y.e_j$. Aplicando la definición de producto interno podrás encontrar ciertos $a_{ij} \in \mathbb{R}\ \forall\, i,j = 1,\ldots,n$ tales que

$$\langle \vec{X},\vec{Y}\rangle = a_{11}x_1y_1 + \cdots + a_{1n}x_1y_n + a_{21}x_2y_1 + \cdots + a_{2n}x_2y_n + \vdots + a_{n1}x_ny_1 + \cdots + a_{nn}x_ny_n.$$

2. ¿Cuál producto interno se define si se considera que A es la matriz identidad?

Ejercicio 5. Sea V un espacio vectorial real con producto interno y $\| \quad \| : V \to \mathbb{R}$ su norma inducida.

1. Ayúdate de una interpretación geométrica para probar:
   a. La *Regla del paralelogramo*: $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$, $\forall\, v, w \in V$.
   b. La *Fórmula de polarización*: $4\langle v, w\rangle = \|v+w\|^2 - \|v-w\|^2$, $\forall\, v, w \in V$.
2. Analiza si alguna de las propiedades anteriores sigue valiendo en un espacio vectorial complejo.

Ejercicio 6. En los espacios vectoriales que se indican, calcula $\langle v, w\rangle$, $\|v\|^2$, $\|w\|^2$ y $\|v+w\|^2$. Verifica explícitamente que se satisfacen la *desigualdad de Cauchy-Schwarz* y también la *desigualdad triangular* para estos casos.

1. $V = \mathbb{C}^3$ con el producto interno habitual, $v = (2, 1+i, i)$ y $w = (2-i, 2, 1+2i)$.
2. $V = C[0,1]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$, $v : v(t) = t$ y $w : w(t) = e^t$.

2. Conjuntos ortogonales y ortonormales

Ejercicio 7. Considera un espacio vectorial real V con producto interno y la norma inducida por él. Ayúdate de interpretaciones geométricas para:

1. Probar que si $v+w$ y $v-w$ son ortogonales, entonces v y w tienen la misma norma.
2. Probar que si u y v son ortogonales, entonces $\|u + \lambda v\| \geq \|u\| \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 8. Considera $V = \mathbb{R}_2[t]$, con el producto interno $\langle p, q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 p(t)q(t)dt$.
Usa el método de Gram-Schmidt para construir una base ortonormal de V a partir de $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$.

Ejercicio 9. En cada uno de los espacios vectoriales con producto interno que siguen, construye una base ortonormal del subespacio S que se indica.

1. $V = \mathbb{R}^4$ con el producto interno habitual y $S = \big[(1,1,0,0), (1,1,1,1), (-1,0,2,1)\big]$.
2. $V = \mathbb{C}^3$ con el producto interno habitual y $S = \big[(1,i,0), (1,1,1)\big]$.

Ejercicio 10. Sea A en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Prueba que si las columnas de A forman un conjunto ortonormal de vectores de $\mathbb{R}^m$ con el producto interno habitual, entonces $A^tA = I_n$.

Ejercicio 11. Define un producto interno en V para el cual la base $\mathcal{B}$ resulta ser ortonormal. Observa que el resultado del ejercicio 4 puede ser especialmente útil para esta construcción.

1. $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \big\{(1,1), (2,-1)\big\}$.
2. $V = \mathbb{C}^2$, $\mathcal{B} = \big\{(1,i), (-1,i)\big\}$.
3. $V = \mathbb{C}^3$, $\mathcal{B} = \big\{(1,i,1), (0,0,1), (0,1,i)\big\}$.

Ejercicio 12. Sea $\mathbb{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V con producto interno.
Prueba que si $\forall w = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i v_i \in V$, vale $\langle w, w\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i^2$, entonces $\mathbb{B}$ es una base ortonormal de V.

Ejercicio 13. En un espacio vectorial V con producto interno y considerando su norma inducida, prueba que si $\mathcal{B} = \{u_1, ..., u_n\}$ es una base ortogonal, entonces se satisfacen:

1. $coord_{\mathcal{B}}[v] = \left(\dfrac{\langle v, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}, \ldots, \dfrac{\langle v, u_n\rangle}{\|u_n\|^2}\right)$, $\forall\, v \in V$.
2. $\langle v, w\rangle = \dfrac{\langle v, u_1\rangle\langle u_1, w\rangle}{\|u_1\|^2} + \cdots + \dfrac{\langle v, u_n\rangle\langle u_n, w\rangle}{\|u_n\|^2}$, $\forall\, v, w \in V$.