

PRÁCTICO 3: GERSCHGORIN Y JORDAN.

Recuerda: Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), entonces:

- $\mathbb{K}_n[x]$ denota el espacio de polinomios de grado menor $n + 1$ con coeficientes en $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ denota el espacio de matrices con coeficientes en $\mathbb{K}$ de m filas y n columnas.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$.

1. Teorema de Gerschgorin

EJERCICIO 1. Considera $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j = \emptyset$ ($i \neq j$), donde $\mathcal{C}_i$ son los círculos de Gerschgorin de A , con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Prueba que todas las raíces del polinomio característico de A son reales y distintas.

EJERCICIO 2. ¿Es posible decidir si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ -3/2 & -1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable utilizando únicamente el Teorema de Gerschgorin? Justifica.

EJERCICIO 3. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 14 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -9 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -20 \end{pmatrix}$.

1. Prueba que A es diagonalizable.
2. Determina el signo de los valores propios de A y deduce que A es invertible.

EJERCICIO 4.

1. Usando el teorema de Gerschgorin, extrae toda la información que puedas sobre los valores

propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$.

2. Usando el teorema de Gerschgorin, extrae toda la información que puedas sobre los valores

propios de la matriz $B = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$.

3. Investiga si alguna de ellas es diagonalizable. Justifica.

EJERCICIO 5.

1. Utiliza el Teorema de Gerschgorin para acotar los valores propios de la matriz a continuación.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -10^{-5} & 2 \times 10^{-5} \\ 4 \times 10^{-5} & 0,5 & -3 \times 10^{-5} \\ -10^{-5} & 3 \times 10^{-5} & 0,1 \end{pmatrix}.$$

2. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $S = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Encuentra los círculos de Gerschgorin de la matriz $S^{-1}AS$.

3. Halla α de modo que el radio r_1 del círculo con centro en $(S^{-1}AS)_{1,1}$ sea tan pequeño como sea posible sin que este círculo se interseque con los otros dos.

4. Localiza el valor propio λ_1 de la matriz A en un círculo tan pequeño como sea posible.
(Observa que los valores propios de A y $S^{-1}AS$ son los mismos).
5. Utiliza matrices análogas a S para obtener mejores aproximaciones de λ_2 y λ_3

EJERCICIO 6. Sea $A = \begin{pmatrix} 15+3i & 1 & 1 \\ 2 & 7-4i & 1 \\ 1 & 2 & -5-5i \end{pmatrix}$.

Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. A es diagonalizable.
2. A es invertible.
3. A tiene al menos un valor propio real.

2. Forma de Jordan

2.1. Subespacios invariantes

Recuerda: Si $T : V \rightarrow V$ es una transformación lineal y $S \subset V$ es un subespacio de V , decimos que S es un *subespacio invariante bajo T* (o T -invariante) si $T(s) \in S$ para todo vector $s \in S$.

EJERCICIO 7. Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal.

1. Si W_1 y W_2 son subespacios de V invariantes bajo T , probar que $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$ son dos subespacios invariantes bajo T .
2. Probar que si λ es valor propio de T , entonces el subespacio propio S_λ es un subespacio invariante bajo T .
3. Probar que si λ es valor propio de T y $W = [v_1, v_2]$, con $v_1 \in S_\lambda$ y $T(v_2) = v_1$, entonces W es un subespacio invariante bajo T .
4. Si W es un subespacio de V invariante bajo T y $\dim(W) = 1$.
 - a) Probar que los vectores no nulos de W son vectores propios de T .
 - b) ¿ W es un subespacio propio T ? Justifique la respuesta.
5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal para la cual son T -invariantes los siguientes subespacios:
 - $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$,
 - $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$
 - $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\}$
 - a. Prueba que T es diagonalizable.
 - b. Si se sabe que $2T - T^2 = Id$ en W_1 y $T = 2Id$ en $W_2 \cap W_3$, halla los valores propios de T .

EJERCICIO 8. Considera una transformación lineal T cuya matriz asociada en la base canónica $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ es

$${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a. Halla los subespacios invariantes de T .
- b. Halla los valores propios de T .
- c. Discute según θ si T es diagonalizable.

2.2. Forma canónica de Jordan

EJERCICIO 9. Halla la forma canónica y una base de Jordan para los siguientes operadores:

1. $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (-y - 2z, x + 3y + z, x + 3z)$.
2. $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (3x + 2y - 2z, 4y - z, y + 2z)$.
3. $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $F(x, y, z, t) = (2y, -2x + 4y, z + t, z + t)$.

EJERCICIO 10. Hallar la forma canónica y una base de Jordan para las matrices siguientes. Observa el trabajo realizado en el ejercicio 9 antes de comenzar a efectuar cálculos:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 11. Prueba que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$ y calcula $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{10}$.

EJERCICIO 12. Sean $a \in \mathbb{R}$ y una matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$.

1. Discutir según a si A es diagonalizable, justificando las respuestas con cuidado.
2. Para los casos en que A no es diagonalizable y $|a| \geq 2$, encuentra su forma canónica de Jordan. Justifica.

EJERCICIO 13. ¿Las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ son semejantes?

EJERCICIO 14. Sea V un espacio vectorial de dimensión 6 y $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal que cumple lo siguiente:

- El polinomio característico de T tiene todas sus raíces en el cuerpo,
- El polinomio $(t - 2)^3$ divide al polinomio característico de T ,
- $N(T - 3Id) \neq \{\mathbf{0}\}$,
- La multiplicidad algebraica de 4 es mayor que 1.

Calcular la traza de T .

EJERCICIO 15. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$$T(1, 1, 0) = T(-1, 0, 1) = (2, -2, 0) \text{ y } T(0, -1, 1) = (-6, 2, -4).$$

1. Indica si T es diagonalizable. En caso de serlo, encuentra una base de vectores propios. En caso de que no, encuentra una base de Jordan.
2. Indica todos los subespacios invariantes bajo T que sean de dimensión 1.
3. ¿Existen subespacios invariantes bajo T de dimensión 2? En caso de existir, indica al menos uno de ellos.