

Guía Detallada de Fracciones Parciales

Ejercicio (i): $F(s) = \frac{s+2}{2(s^2-1)}$

Paso 1: Factorizar el denominador

Primero factorizamos completamente el denominador:

$$s^2 - 1 = (s - 1)(s + 1)$$

Por lo tanto:

$$F(s) = \frac{s + 2}{2(s - 1)(s + 1)}$$

Paso 2: Plantear la descomposición

Expresamos la fracción como suma de fracciones más simples:

$$\frac{s + 2}{2(s - 1)(s + 1)} = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{s + 1}$$

Paso 3: Eliminar denominadores

Multiplicamos ambos lados por el denominador original:

$$s + 2 = 2A(s + 1) + 2B(s - 1)$$

Paso 4: Resolver el sistema de ecuaciones

Agrupamos términos semejantes:

$$s + 2 = (2A + 2B)s + (2A - 2B)$$

Esto nos da el sistema:

$$\begin{aligned} 2A + 2B &= 1 && \text{(coeficientes de } s) \\ 2A - 2B &= 2 && \text{(términos independientes)} \end{aligned}$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned}A + B &= 0,5 \\A - B &= 1 \\ \Rightarrow 2A &= 1,5 \Rightarrow A = 0,75 \\ \Rightarrow B &= 0,5 - 0,75 = -0,25\end{aligned}$$

Paso 5: Reescribir la transformada

Sustituimos los valores encontrados:

$$F(s) = \frac{0,75}{s-1} - \frac{0,25}{s+1} = \frac{3/4}{s-1} - \frac{1/4}{s+1}$$

Paso 6: Aplicar la antitransformada

Usamos la tabla de transformadas básicas:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-a} \right\} = e^{at}$$

Por lo tanto:

$$f(t) = \frac{3}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t}$$

Caso General para Fracciones Parciales

Tipos de factores en el denominador

1. Factores lineales distintos $(s-a)$:

$$\frac{N(s)}{(s-a)(s-b)} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b}$$

2. Factores lineales repetidos $(s-a)^n$:

$$\frac{N(s)}{(s-a)^n} = \frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(s-a)^n}$$

3. Factores cuadráticos irreducibles (s^2+bs+c) :

$$\frac{N(s)}{(s^2+bs+c)} = \frac{As+B}{s^2+bs+c}$$

Ejemplo con factor cuadrático: Ejercicio (v)

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4)}$$

Descomposición:

$$\frac{s+1}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

Resolución:

$$\begin{aligned} s+1 &= A(s^2+4) + (Bs+C)s \\ &= (A+B)s^2 + Cs + 4A \end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ C &= 1 \\ 4A &= 1 \Rightarrow A = 1/4 \\ \Rightarrow B &= -1/4 \end{aligned}$$

Solución final:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1/4}{s} + \frac{(-1/4)s+1}{s^2+4} \\ f(t) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos(2t) + \frac{1}{2} \sin(2t) \end{aligned}$$