Matemática 1
Primer Parcial

CURE

9 de Mayo de 2024

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deber utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.

Problema 1 [10 pts.]

(a) [5 pts] Sea el conjunto A, del que se sabe:

$$A \subseteq (\mathbb{R} - \mathbb{Q}),\ \sqrt{2} \in A \text{ y } sup(A) = \pi$$

Indicar en cada caso, justificando, si la proposición es verdadera, falsa o los datos son insuficientes para contestar.

1. Siendo el conjunto $B = \{x \in \mathbb{R} /\ x > \pi\}$ entonces,

   $$b \in \mathbb{R} \text{ es cota superior de } A \text{ si solo si } b \in B$$

2. $3,141516 \in A$
3. $\forall x \in ((\mathbb{R} - \mathbb{Q})),\ \sqrt{2} < x < \pi$ entonces $x \in A$
4. A acotado inferiormente
5. $\sqrt{3} \notin A$

(b) [5 pts.] Demuestre por inducción completa la siguiente proposición:

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Problema 2 [15 pts.]

(a) [6 pts] Calcular el siguiente límite:

$$lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} x^2$$

(b) [9 pts.] Sea $f : [0,\ +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x+1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x \in (0,\ +\infty) \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Estudiar continuidad de f. [4 pts]
2. En caso de existencia hallar extremos relativos. Justificar. [5 pts.]

Problema 3 [10 pts.]

(a) [5 pts.] Si f es una función que tiene derivada cuarta en algún entorno de 0 y $P_3(x) = 1 - 8x^2 + 5x^3$ es el polinomio de Mac Laurin de orden 3 de f.
Hallar $f(0), f^{'}(0), f^{''}(0)$ y $f^{'''}(0)$.

(b) [5 pts.] Aproximar $\sqrt[3]{e}$ con un error menor a 10^{-4}. Fundamente

Problema 4 [15 pts.]

(a) [6 pts.] Dadas las funciones$f : f(x) = e^x$ y $g : g(x) = -x^2 + ax + b$, hallar los valores de a y b para que los gráficos de f y g tengan tangente común en el punto de abscisa 0.

(b) [9 pts.] Hallar el punto de la recta $3x + 4y - 7 = 0$, de tal forma que la distancia al origen$(0, 0)$ sea mínima.
Sugerencia: recordar que la distancia mínima en un plano entre 2 puntos cualesquiera es la distancia euclídea dada por:
$dist(p_a, p_b) = \sqrt{(p_{ax} - p_{bx})^2 + (p_{ay} - p_{by})^2}$.