

Práctico 6: Funciones generatrices

Ref. Grimaldi Sección 10.4

FUNCIONES GENERATRICES ORDINARIAS

Ejercicio 1. Encuentre la función generatriz para cada una de las siguientes sucesiones:

1. $4, 4, 4, 4, 4, \dots$
2. $2, 4, 6, 8, 10, \dots$
3. $1, 5, 25, 125, \dots$
4. $1, -3, 9, -27, 81, \dots$
5. $1, 0, 5, 0, 25, 0, 125, 0, \dots$

Ejercicio 2. Encuentre la sucesión generada por las siguientes funciones generatrices:

1. $\frac{4x}{1-x}$
2. $\frac{1}{1-4x}$
3. $\frac{x}{1+x}$
4. $\frac{3x}{(1+x)^2}$

Ejercicio 3. Explique cómo sabemos que $\frac{1}{(1-x)^2}$ es la función generatriz para $1, 2, 3, 4, \dots$

Ejercicio 4. Encuentre una función generatriz para la sucesión con relación de recurrencia $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$ con términos iniciales $a_0 = 1$ y $a_1 = 5$.

Ejercicio 5. Calcule los primeros cinco términos de la sucesión generada por la función:

1. $G(x) = \frac{1}{(1-x)(1-2x)}$
2. $G(x) = \frac{3x-1}{(1-x)^3}$

APLICACIONES COMBINATORIAS

Ejercicio 6. Encuentre una función generatriz para el número de maneras de seleccionar monedas de 1, 2 y 5 pesos si:

1. No hay restricciones en el número de monedas de cada tipo.
2. Necesitamos exactamente 10 monedas.
3. No podemos usar más de 4 monedas de 1 peso, 3 monedas de 2 pesos y 2 monedas de 5 pesos.

Ejercicio 7. Use funciones generatrices para determinar el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación:

1. $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ donde $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
2. $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ donde $x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 3$

Ejercicio 8. Use funciones generatrices para encontrar el número de formas de obtener una suma de:

1. 7 al lanzar dos dados.
2. 12 al lanzar tres dados.

ECUACIONES EN RECURRENCIAS MEDIANTE FUNCIONES GENERATRICES

Ejercicio 9. Resuelva las siguientes relaciones de recurrencia por el método de las funciones generatrices:

1. $a_{n+1} - a_n = 3^n, \quad n \geq 0, a_0 = 1$
2. $a_{n+1} - a_n = n^2, \quad n \geq 0, a_0 = 1$
3. $a_n - 3a_{n-1} = 5^{n-1}, \quad n \geq 1, a_0 = 1$

Ejercicio 10. Resuelva las siguientes relaciones de recurrencia por el método de las funciones generatrices:

1. $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0, \quad n \geq 0, a_0 = 1, a_1 = 6$
2. $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n, \quad n \geq 0, a_0 = 1, a_1 = 2$

Ejercicio 11. Para n objetos distintos, sea $a(n, r)$ el número de formas en que podemos seleccionar r de los n objetos, $0 \leq r \leq n$, sin repetición. En este caso, $a(n, r) = 0$ cuando $r > n$. Use la relación de recurrencia $a(n, r) = a(n-1, r-1) + a(n-1, r)$, donde $n \geq 1$ y $r \geq 1$, para mostrar que $f(x) = (1+x)^n$ genera $a(n, r), r \geq 0$.

Ejercicio 12. Use funciones generatrices para encontrar una fórmula cerrada para a_n en las siguientes sucesiones:

1. $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$ con $a_0 = 1$ y $a_1 = 3$
2. $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 4 \cdot 2^n$ con $a_0 = 1$ y $a_1 = 6$

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

Ejercicio 13. Use la relación de recurrencia para los números de Fibonacci para encontrar la función generatriz de la sucesión de Fibonacci.

Ejercicio 14. Suponga que A es la función generatriz para la sucesión $3, 5, 9, 15, 23, 33, \dots$

1. Encuentre una función generatriz (en términos de A) para la sucesión de diferencias entre términos.
2. Escriba la sucesión de diferencias entre términos y encuentre una función generatriz para ella (sin hacer referencia a A).
3. Use sus respuestas a las partes (a) y (b) para encontrar la función generatriz de la sucesión original.

Ejercicio 15. Considere todos los posibles productos que usan exactamente tres factores entre los números $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, donde se permite la repetición. Encuentre una función generatriz para a_n , donde a_n representa el número de distintos valores de productos posibles.

Ejercicio 16. Resuelva la siguiente relación de recurrencia por el método de las funciones generatrices:

$$a_{n+1} - (n+1)a_n = 2^{n+1}, \quad n \geq 0, \quad a_0 = 1.$$

Comentario: Obtendrá una ecuación diferencial. Para evitarla puede hacer el cambio $a_n = n!b_n$.