Universidad de la República
CENUR Noreste
Sede Rivera

Matemática I
Lic. en RRNN y LBH
Primer semestre 2025

Práctico N^o 1: funciones

Ejercicio 1. La llamada ecuación de los gases ideales se expresa mediante la fórumla

$$PV = nRT,$$

donde P es la presión, V el volumen, T la temperatura, n el número de moles (1 mol de gas corresponde a $6{,}022 \times 10^{23}$ moléculas del mismo) y R una constante "universal", o sea, que no depende del tipo de gas que estemos considerando. Vamos a suponer que P se mide en atmósferas[1], V es litros y la temperatura en grados Kelvin (lo que se simboliza con la letra K): recordemos $0^o\,C = 273\,K$.

Supongamos que tenemos $1\,mol$ de gas sometido a una temperatura que mantenemos constante de $273\,K$.

1. Probar (o sea, explicar la razón de) que el volumen V del gas varía como función de la presión P.
2. Bosquejar el gráfico de la función $V = V(P)$ (la constante $R \approx 0,082$).

Ejercicio 2. Vamos a suponer que tenemos un dispositivo que registra la temperatura en cada instante de tiempo. Colocamos el dispositivo a la intemperie, en un lugar fijo, y comenzamos a registrar la temperatura T en un instante inicial $t_0 = 0$ horas (media noche) en punto, que supongamos sea $17^o\,C$, manteniendo el dispositivo en funcionamiento hasta las 24 horas (o sea, las 0 horas del día siguiente).

1. Probar que el registro de las temperaturas define una función del tiempo t, o sea $T = T(t)$, y determinar su dominio.
2. ¿Es la función $T(t)$ inyectiva? (justificar la respuesta)
3. Se sabe que la temperatura mínima fue de 16 grados y se registró a las 7 y media, mientras la máxima fue de 27 grados y se registró a las 13 horas y 15 minutos. Hallar el recorrido (o conjunto imagen) de $T(t)$.
4. Si el dispositivo permaneció desconectado entre las 19:30 y las 19:45, ¿cuál es el dominio de la función $T(t)$?

Ejercicio 3. Designemos D al conjunto formado por los departamentos de Cerro Largo, Tacuarembó y Rivera, y C al conjunto formado por las ciudades de Melo, Paso de los Toros, Río Branco, Rivera, Tacuarembó y Tranqueras.

Se definen las siguientes funciones:

$f : D \to C$ tal que $f(d) =$ capital de d.

$g : C \to D$ tal que $g(c) =$ departamento en el que se encuentra c.

1. ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? ¿Es f biyectiva?

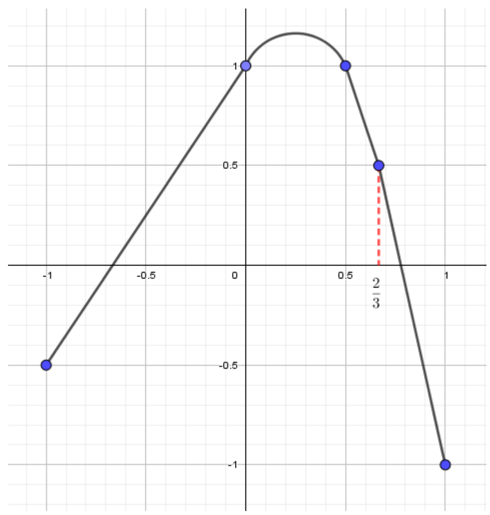
[1] 1 atmósfera, simbolazado $1\,atm$, es la presión que ejerce una columna de mercurio de $760\,mm$ de altura a la temperatura de $0\,^oC = 273\,K$; intuitivamente es la presión que ejerce la atmósfera, en un día de "presión normal", al nivel del mar.

2. ¿Es g inyectiva? ¿Es g sobreyectiva? ¿Es g biyectiva?

3. Explique qué función se obtiene haciendo $h(d) = g(f(d)), d \in D$.

4. Explique qué función se obtiene haciendo $j(c) = f(g(c)), c \in C$.

Ejercicio 4. Sea f la función de la figura siguiente, cuyo dominio es $[-1, 1]$.



1. *a*) ¿El punto $(1, -1)$ pertenece al gráfico de f? ¿El punto $(-1, 1)$ pertenece al gráfico de f?
   b) Halle $f(-1)$ y $f(1/2)$
   c) Completar las siguientes afirmaciones:
      1) $f(x) = 1$ en $x = \dots$
      2) $f(x) = 0$ en $x = \dots$, $f(x) < 0$ si x pertenece a $\dots\dots\dots$, $f(x) > 0$ si x pertenece a $\dots\dots\dots$
      3) f es creciente en el intervalo $\dots\dots\dots$, f es decreciente en el intervalo $\dots\dots\dots$
      4) El máximo de f es aproximadamente $\dots$ y se da en $x = \dots$.
      5) El mínimo de f es $\dots$ y se da en $x = \dots$.

2. *a*) Dibujar el gráfico de $f(x) + 2$, $f(x) - 2$.
   b) Dibujar el gráfico de $-f(x)$, $3f(x)$, $-3f(x)$.
   c) Dibujar el gráfico de $|f(x)|$.

Ejercicio 5. En este ejercicio consideraremos la función lineal $f(x) = ax + b$ tal que los dos puntos $(4, 7)$ y $(-1, 1)$ pertenecen a su gráfico.

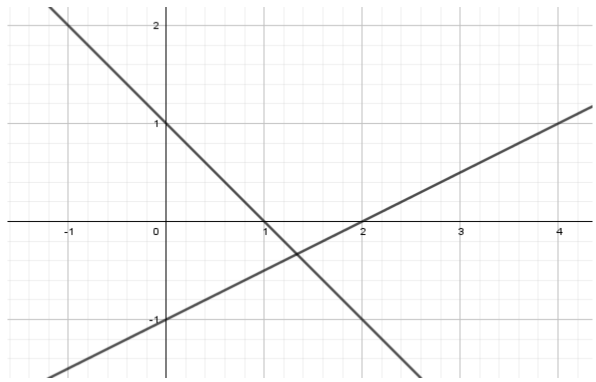
1. Dibujar en el plano el gráfico de f.

2. Hallar a y b.

3. Hallar el valor de la función en 0 y comprobar que el punto que corresponde al gráfico efectivamente pertenece a la recta que une $(4, 7)$ con $(-1, 1)$.

4. Hallar la raíz de f.

Ejercicio 6. Dados los dos gráficos que se representan en la figura,



identificar a qué funciones lineales corresponden. Hallar las coordenadas del punto de corte de los dos gráficos.

Ejercicio 7. Bosquejar el gráfico de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x - 1$	b) $f(x) = x^2$
c) $f(x) = x^2 + 4$	d) $f(x) = (x+4)^2$
e) $f(x) = \|x\|$	f) $f(x) = \|3x+1\|$
g) $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & x < 4, \\ -x-5, & x \geq 4, \end{cases}$	h) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 1, \\ x^3, & x \leq 1. \end{cases}$

Ejercicio 8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$. Hallar

a) $f \circ f$ b) $f \circ f \circ f$ c) $f \overbrace{\circ \cdots \circ}^{n} f$ (n veces).

Ejercicio 9. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = kx$ y $g(x) = x^2 + x + 1$.

1. Hallar $f \circ g$ y $g \circ f$.
2. Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ se tiene $f \circ g = g \circ f$?

Ejercicio 10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función $f(x) = x^2$

1. ¿Es f invertible?
2. Establecer el dominio y codominio más grande de la función $f(x)$ para que sí sea invertible. Determinar su función inversa y el correspondiente gráfico.
3. ¿Es cierto que $\sqrt{a^2} = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$? (referencia: Ejercicio 2, parte 4, del práctico 0).

Ejercicio 11. Ciertas células epiteliales demoran (aproximadamente) 24 horas para duplicarse.

1. Supongamos que en tiempo "inicial" $t_0 = 0$ fijamos la atención en una célula determinada de dicho tipo, que llamaremos la célula C. Toda célula que provenga de las subsecuentes divisiones a partir de C diremos que es "generada por C".

    a) ¿Cuántas células habrá generado C en 10 días?

    b) ¿Cuántas células habrá generado C en t días?

c) Explicar la siguiente afirmación: El número de células generadas por C, digamos N_C, es función del tiempo t, o sea, $N_C = N_C(t)$.

d) Bosquejar el gráfico de $N_C(t)$, indicando su dominio y recorrido.

e) Calcular el tiempo que se necesita para que hayan 100.000 células generadas por C.

2. Supongamos ahora que en tiempo inicial hay 512 células.

   a) Exprese en una fórmula el número de células en función del tiempo t.

   b) ¿Cuantas células había 3 días antes del tiempo 0?

Ejercicio 12. Dado un número real x, se llama *parte entera* de x al mayor número entero que no supera x, y que denotaremos $E(x)$.

1. Explicar porqué $E(x)$ define una función (E es función de x).
2. Hallar $E(0)$, $E(1{,}2)$, $E(\sqrt{2})$, $E(-1)$, $E(-0{,}9)$.
3. Graficar $E(x)$ en el intervalo $-2,5 < x < 2,5$.

Ejercicio 13. Recordar que $\log a = b$ si y solo si $a = e^b$, donde log es el *logaritmo neperiano*. Calcular, en función de los valores de $\log 2$ y $\log 3$, los siguientes valores:

(i) *a*) $\log 9$ *b*) $\log 6$ *c*) $\log(\sqrt{3})$ *d*) $\log(1/2)$.

(ii) ¿Se puede afirmar que $\log(5) = \log(3)\log(2)$?

(iii) ¿Tiene sentido definir $\log(-1)$?

Ejercicio 14. Se sabe que el **pH** del jugo de tomate es 4.1.

1. Calcule la concentración de iones hidrógeno e hidróximo del jugo de tomate.
2. Calcule la razón (o sea el cociente) entre las concentraciones de hidrógeno e hidróximo del jugo de tomate, expresándola en forma de potencias de diez.

Ejercicio 15. Consideramos $sen : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ y $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$.

1. Graficar y explicar por qué son funciones biyectivas.
2. Sean *Arcsen*, *Arcos* y *Arctan* las funciones inversas de *sen*, *cos* y *tan* respectivamente. Graficar dichas funciones inversas.