Matemática Discreta 1 - 2025

Práctico 2: Funciones y relaciones

Ref. Grimaldi Secciones 5.1, 5.2

Relaciones

Ejercicio 1. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 5\}$, y $C = \{3, 4, 7\}$, determine:

1. $A \times B$.
2. $B \times A$.
3. $A \cup (B \times C)$.
4. $(A \cup B) \times C$.

Ejercicio 2. Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 4, 5\}$, dé ejemplos de:

1. Tres relaciones no vacías de A a B.
2. Tres relaciones no vacías en A.

Ejercicio 3. Para $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 4, 5\}$, determine lo siguiente:

1. $|A \times B|$.
2. El número de relaciones de A a B.
3. El número de relaciones en A.
4. El número de relaciones de A a B que contienen $(1, 2)$ y $(1, 5)$.
5. El número de relaciones de A a B que contienen exactamente cinco pares ordenados.
6. El número de relaciones en A que contienen al menos siete elementos.

Ejercicio 4. Sea A, B conjuntos con $|B| = 3$. Si hay 4096 relaciones de A a B, ¿cuál es $|A|$?

Funciones

Ejercicio 5. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas y/o sobreyectivas:

1. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(a) = a - 1$.
2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(a) = a^3 - 2a$.
3. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(a) = a^3 - 2a$.
4. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(a, b) = a$.
5. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(a, b) = 2^a 3^b$.
6. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(a, b) = 2^a 3^b$.
7. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(n, m) = 2^m(2n + 1) - 1$. *Aclaración:* Suponemos que $0 \in \mathbb{N}$.

8. $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = 2^y(2x + 1) - 1$.

Ejercicio 6. Dados $A = \{1, 2, \ldots, m\}$ y $B = \{1, 2, \ldots, n\}$, calcule la cantidad de funciones f de A a B que satisfacen:

1. f es inyectiva.
2. f es biyectiva.
3. $f(i) < f(j)$ para todo $i < j$ en A.
4. $f(i) \leqslant f(j)$ para todo $i \leqslant j$ en A.

Ejercicio 7. Sea A un conjunto con 10 elementos y B uno con 3 elementos.

a) ¿Cuántas funciones diferentes de A a B hay?

b) Si denotamos con $\mathcal{P}(X)$ al conjunto de partes de X, es decir al conjunto de todos los subconjuntos de X ¿Cuál es el cardinal de $\mathcal{P}(B)$? ¿y el de $\mathcal{P}(A)$?

c) Considere las funciones $f : B \longrightarrow \mathcal{P}(B)$ que verifican para todo $x : \quad f(x) \neq \{x\}$. ¿Cuántas de dichas funciones hay?

Ejercicios Complementarios

Ejercicio 8. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos funciones y $g \circ f$ la composición de f con g, es decir que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Si considera que los conjuntos A, B y C son finitos, pruebe o encuentre un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

1. Si f y g son inyectivas también lo es $g \circ f$.
2. Si f y g son sobreyectivas también lo es $g \circ f$.
3. Si $g \circ f$ es inyectiva también lo es f.
4. Si $g \circ f$ es inyectiva también lo es g.
5. Si $g \circ f$ es sobreyectiva también lo es f.
6. Si $g \circ f$ es sobreyectiva también lo es g.

Ejercicio 9. Demuestre el siguiente teorema. Para cualesquiera conjuntos $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$:

1. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
3. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
4. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Ejercicio 10. Sea $\mathcal{R} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ una relación donde $(m, n) \in \mathcal{R}$ si y solo si $n = 5m + 2$.

1. Dé una definición recursiva para $\mathcal{R}$.
2. Use la definición recursiva de la parte (a) para mostrar que $(4, 22) \in \mathcal{R}$.