Teoría de Circuitos

Práctico ∞
Repaso

CURE

Ejercicio 1

Diagramar los siguientes complejos:

a) $2 + 3j$

b) $j^2 + 3$

c) $1 + \frac{1}{j}$

d) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}j$

e) $3e^{\frac{\pi}{2}}j$

Ejercicio 2

Pasar de coordenadas rectangulares a coordenadas polares los siguientes números complejos:

a) $2 + 3j$

b) $j^2 + 3$

c) $1 + \frac{1}{j}$

d) $\frac{1}{2} + 4j^3$

Ejercicio 3

Pasar de coordenadas polares a coordenadas rectangulares los siguientes números complejos:

a) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}j}$

b) $3e^{\frac{\pi}{2}j}$

c) $2\sqrt{2}e^{\pi j}$

d) $10e^{\frac{13\pi}{4}j}$

Ejercicio 4

Diagramar, dar las expresiones en coordenadas polares y en coordenadas rectangulares de los siguientes números complejos:

a) $\frac{3j+1}{5j^3(j-2)^2}$

b) $\frac{1}{-j^5}$

c) $\frac{j+1}{3j+1}$

d) $\frac{2\sqrt{2}e^{\pi j}}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}j}}j$

Ejercicio 5

Para los siguientes números complejos, grafíquelos en el plano complejo y realice las operaciones planteadas en a) y b).

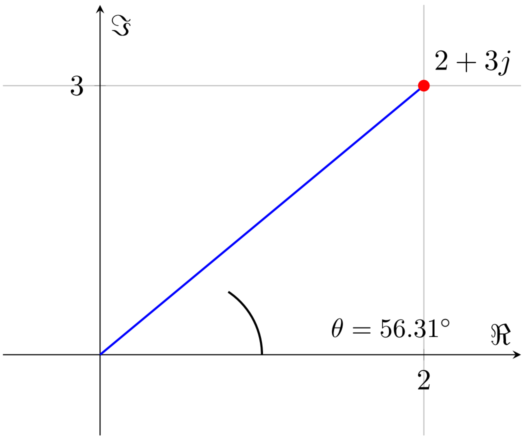
- $\frac{j+1}{3j+1}$
- $\frac{2+3J}{-j^5}$
- $\frac{j+1}{2\sqrt{2}e^{\pi j}}$
- $2\sqrt{2}e^{\pi j}10e^{\frac{13\pi}{4}j}$

a) Observar qué sucede geométricamente al multiplicarlos por j y $\frac{1}{j}$.

b) Observar qué sucede geométricamente si los multiplicamos por $-j$ y $\frac{1}{-j}$

Solución

1-a **: Representación del número complejo $2 + 3j$ en el plano de Argand .**

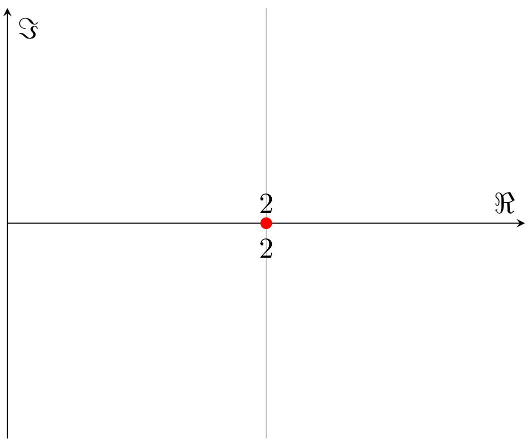


1-b **Representación del número complejo $j^2 + 3$ en el plano de Argand.**

La expresión $j^2 + 3$ se resuelve de la siguiente manera:

$$j^2 + 3 = -1 + 3 = 2$$

Como sabemos, $j^2 = -1$, por lo tanto, la expresión es igual a 2.



1-c Representación del número complejo $1 + \frac{1}{j}$ en el plano de Argand.

Queremos simplificar la expresión $1 + \frac{1}{j}$. Para ello, multiplicamos tanto el numerador como el denominador de la fracción por j:

$$1 + \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{j} \times \frac{j}{j} = 1 + \frac{j}{j^2}$$

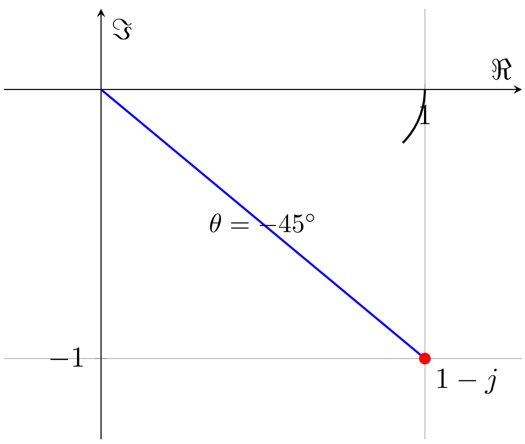
Sabemos que $j^2 = -1$, por lo que podemos sustituir en la expresión:

$$1 + \frac{j}{j^2} = 1 + \frac{j}{-1}$$

Finalmente, simplificamos el resultado:

$$1 + \frac{j}{-1} = 1 - j$$

Por lo tanto, la expresión simplificada es $1 + \frac{1}{j} = 1 - j$.



1-d Representación del número complejo $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}j)$ en el plano de Argand.

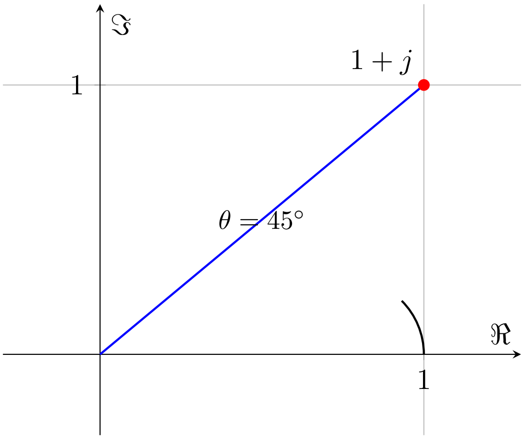
La expresión polar $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}j}$ se convierte en su forma rectangular utilizando la fórmula de Eular :

$$\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}j} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Sustituyendo los valores de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, obtenemos:

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 1 + j$$



1-e **Representación del número complejo $3e^{\frac{\pi}{2}j}$ en el plano de Argand.**

Para convertir de la forma polar $3e^{\frac{\pi}{2}j}$ a la forma rectangular, utilizamos la fórmula de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

En este caso, tenemos $3e^{\frac{\pi}{2}j}$, donde el módulo es $r = 3$ y el ángulo es $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Sustituyendo estos valores en la fórmula de Euler:

$$3e^{\frac{\pi}{2}j} = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

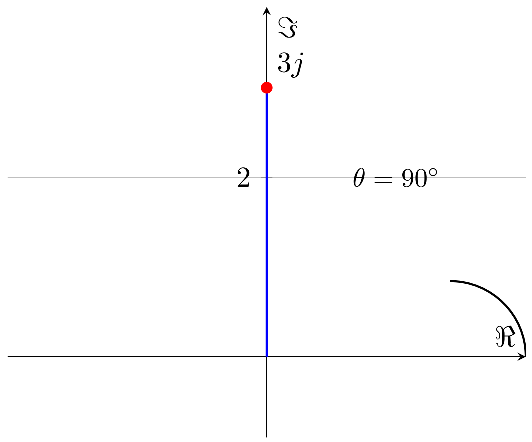
Sabemos que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Por lo tanto, sustituyendo estos valores obtenemos:

$$3e^{\frac{\pi}{2}j} = 3\left(0 + j \cdot 1\right) = 3j$$

Así que la forma rectangular de $3e^{\frac{\pi}{2}j}$ es $3j$, que corresponde a un punto en el eje imaginario en $(0, 3)$.


$\Im$
$3j$
2
$\theta = 90°$
$\Re$

2-a **Pasar de rectangulares a polares.**

Para convertir el número complejo $2+3j$ a su forma polar seguimos los siguientes pasos:

1. Encontrar el módulo r:

$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$

donde $a=2$ y $b=3$, por lo que:

$$r = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

2. Encontrar el ángulo θ:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Sustituyendo $a=2$ y $b=3$, tenemos:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$$

3. Expresión en forma polar: La forma polar en términos de $e^{j\theta}$ es:

$$z = re^{j\theta} = \sqrt{13}e^{j\tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)}$$

2-b Para convertir j^2+3 de forma rectangular a polar, primero calculamos el valor de j^2:

$$j^2 = -1$$

Entonces, sumamos 3:

$$j^2+3 = -1+3 = 2$$

Ahora, la forma polar de 2 es simplemente:

$$2 = 2e^{j0}$$

Así que la forma polar de j^2+3 es $2e^{j0}$.

2-c Para convertir $1+\frac{1}{j}$ de forma rectangular a polar, primero simplificamos la expresión:

Sabemos que $j=\sqrt{-1}$, por lo que:

$$\frac{1}{j} = -j$$

Entonces, la expresión $1 + \frac{1}{j}$ se convierte en:

$$1 + \frac{1}{j} = 1 - j$$

Ahora, para convertir $1 - j$ a forma polar:

Módulo: r:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

donde $a = 1$ y $b = -1$, por lo que:

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

Ángulo θ:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right) = \tan^{-1}(-1)$$

El valor de θ es $-45°$, o $\theta = -\frac{\pi}{4}$ radianes.

La forma polar de $1 - j$ es:

$$z = re^{j\theta} = \sqrt{2}e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

2-d Para convertir $\frac{1}{2} + 4j^3$ de forma rectangular a polar, primero simplificamos j^3:

Sabemos que $j = \sqrt{-1}$, por lo que:

$$j^2 = -1$$

y

$$j^3 = j \cdot j^2 = j \cdot (-1) = -j$$

Entonces:

$$\frac{1}{2} + 4j^3 = \frac{1}{2} - 4j$$

Para convertir $\frac{1}{2} - 4j$ a forma polar:

Módulo: r:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

donde $a = \frac{1}{2}$ y $b = -4$, por lo que:

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-4)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 16} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{64}{4}} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$$

Ángulo θ:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{\frac{1}{2}}\right) = \tan^{-1}(-8)$$

El valor de θ es aproximadamente $-82.87°$, o $\theta \approx -\frac{3\pi}{10}$ radianes.
La forma polar de $\frac{1}{2} - 4j$ es:

$$z = re^{j\theta} = \frac{\sqrt{65}}{2}e^{j\left(-\frac{3\pi}{10}\right)}$$

3-a La expresión en forma polar es:

$$\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

Descomponiéndola en términos de cos y sin, tenemos:

$$\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Sabemos que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Multiplicamos por $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

Por lo tanto, la forma rectangular es:

$$1 + j1$$

3-b La expresión en forma polar es:

$$3e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Descomponiéndola en términos de cos y sin, tenemos:

$$3e^{j\frac{\pi}{2}} = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Sabemos que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Multiplicamos por 3:

$$3 \cdot 0 + 3 \cdot j = 3j$$

Por lo tanto, la forma rectangular es:

$$3j$$

3-c La expresión en forma polar es:

$$2\sqrt{2}e^{j\pi}$$

Descomponiéndola en términos de cos y sin, tenemos:

$$2\sqrt{2}e^{j\pi} = 2\sqrt{2}\left(\cos(\pi) + j\sin(\pi)\right)$$

Sabemos que:

$$\cos(\pi) = -1, \quad \sin(\pi) = 0$$

Multiplicamos por $2\sqrt{2}$:

$$2\sqrt{2} \cdot (-1 + 0j) = -2\sqrt{2}$$

Por lo tanto, la forma rectangular es:

$$-2\sqrt{2}$$

3-d La expresión en forma polar es:

$$10e^{j\frac{13\pi}{4}}$$

Simplificamos el ángulo:

$$\frac{13\pi}{4} - 2\pi = \frac{13\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

Ahora aplicamos la fórmula de Euler:

$$e^{j\frac{5\pi}{4}} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

Sabemos que:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Multiplicamos por 10:

$$10e^{j\frac{5\pi}{4}} = 10\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j \cdot -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Lo que nos da:

$$10e^{j\frac{5\pi}{4}} = -5\sqrt{2} - 5\sqrt{2}j$$

Por lo tanto, la forma rectangular es:

$$-5\sqrt{2} - 5\sqrt{2}j$$

4-a Sabemos que $j^3 = -j$ y $(j-2)^2 = 3-4j$. Entonces, la expresión $\frac{3j+1}{5j^3(j-2)^2}$ se convierte en:

$$\frac{3j+1}{-15j-20}$$

Dada la expresión:

$$\frac{3j+1}{-15j-20}$$

Multiplicamos tanto el numerador como el denominador por el conjugado:

$$\frac{3j+1}{-15j-20} \cdot \frac{-15j+20}{-15j+20}$$

Numerador:

$$(3j+1)(-15j+20) = 3j(-15j+20) + 1(-15j+20)$$

$$= -45j^2 + 60j - 15j + 20$$

$$= -45j^2 + 45j + 20$$

Usamos $j^2 = -1$:

$$-45j^2 + 45j + 20 = -45(-1) + 45j + 20 = 45 + 45j + 20 = 65 + 45j$$

Denominador:

$$(-15j-20)(-15j+20) = (-15j)^2 - 20^2 = 225j^2 - 400$$

Sustituimos $j^2 = -1$:

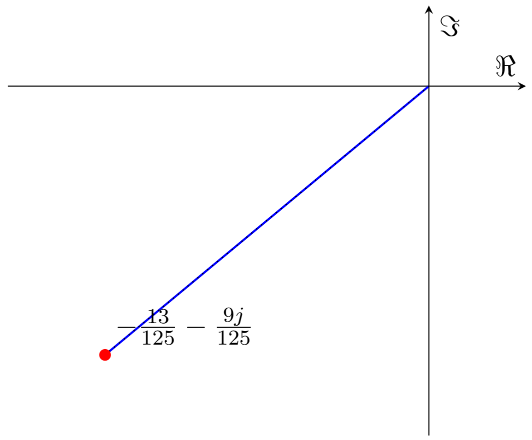
$$225j^2 - 400 = 225(-1) - 400 = -225 - 400 = -625$$

Número simplificado :

$$\frac{65 + 45j}{-625}$$

=

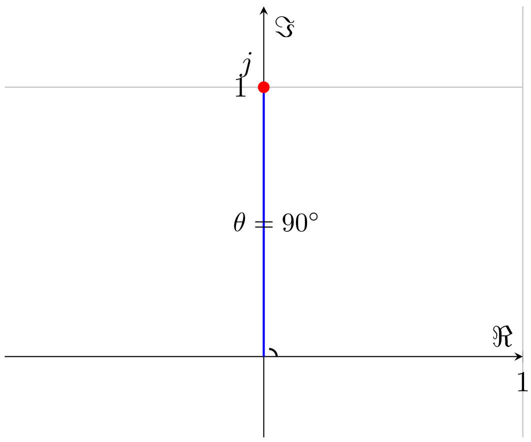
$$-\frac{13}{125} - \frac{9j}{125}$$



$$\theta \approx -36.87°$$

4-b Sabemos que $j^2 = -1$, por lo que $j^5 = j$, y la expresión $\frac{1}{-j^5}$ se convierte en:

$$\frac{1}{-j^5} = j$$



4-c Simplificación:

$$\frac{j+1}{3j+1} \cdot \frac{1-3j}{1-3j} = \frac{(j+1)(1-3j)}{(3j+1)(1-3j)}$$

- Numerador:

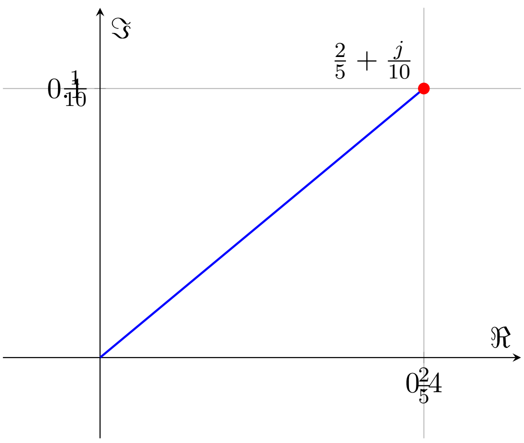
$$(j+1)(1-3j) = j - 3j^2 + 1 - 3j = 1 + 3 + j = 4 + j$$

- Denominador:

$$(3j+1)(1-3j) = 3j - 9j^2 + 1 - 3j = 10 \quad (\text{ya que } j^2 = -1)$$

La expresión simplificada es:

$$\frac{4+j}{10} = \frac{4}{10} + \frac{j}{10} = \frac{2}{5} + \frac{j}{10}$$



Tomando en cuenta el ejercicio 4 tomamos la gráfica de $\frac{j+1}{3j+1}$

Se nos da el siguiente número complejo:

$$z = \frac{2\sqrt{2}e^{\pi j}}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}j}} j \tag{1}$$

Nuestro objetivo es expresar este número en su forma polar y rectangular, y graficarlo en el plano complejo.

Separamos la expresión en partes manejables:

$$z = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{e^{\pi j}}{e^{\frac{\pi}{4}j}}\right) \cdot j \tag{2}$$

1. Simplificamos la magnitud:

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 \tag{3}$$

2. Simplificamos los exponentes:

$$\frac{e^{\pi j}}{e^{\frac{\pi}{4}j}} = e^{\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)j} = e^{\frac{3\pi}{4}j} \tag{4}$$

Por lo tanto,

$$z = 2e^{\frac{3\pi}{4}j}j \tag{5}$$

Recordando que $j = e^{\frac{\pi}{2}j}$, podemos escribir:

$$z = 2e^{\frac{3\pi}{4}j}e^{\frac{\pi}{2}j} \tag{6}$$

Aplicamos la propiedad de los exponentes:

$$e^{\frac{3\pi}{4}j}e^{\frac{\pi}{2}j} = e^{\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)j} = e^{\frac{5\pi}{4}j} \tag{7}$$

Entonces:

$$z = 2e^{\frac{5\pi}{4}j} \tag{8}$$

La conversión a la forma rectangular se basa en la expresión:

$$z = r(\cos\theta + j\sin\theta) \tag{9}$$

donde $r = 2$ y $\theta = \frac{5\pi}{4}$. Usando valores conocidos:

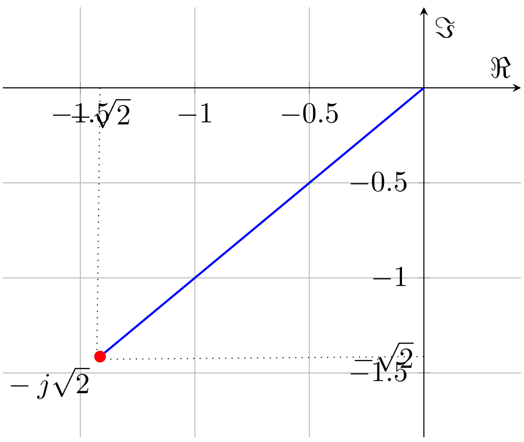
$$\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{10}$$

Multiplicamos por 2:

$$z = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \tag{11}$$

$$z = -\sqrt{2} - j\sqrt{2} \tag{12}$$

Representación gráfica.
El número $z = -\sqrt{2} - j\sqrt{2}$ se ubica en el tercer cuadrante en el punto $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.



5 Observación geométrica multiplicando por j y $\frac{1}{j}$

Si multiplicamos estos números complejos por j y $\frac{1}{j}$, observaremos lo siguiente:

- Multiplicar por j en el plano complejo corresponde a una rotación de 90° en el sentido antihorario.
- Multiplicar por $\frac{1}{j}$ equivale a multiplicar por $-j$, lo que implica una rotación de 90° en el sentido horario.

Para cada número complejo z, al multiplicarlo por j o $\frac{1}{j}$, su posición en el plano complejo se desplazará de acuerdo con estas rotaciones.

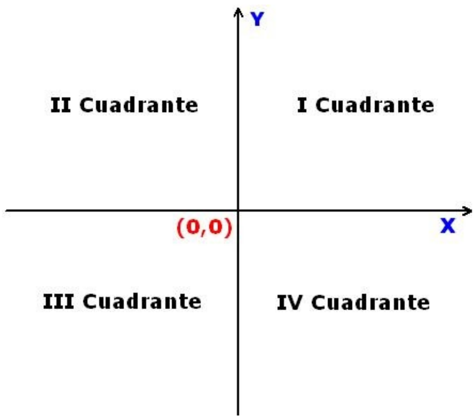
Observación geométrica multiplicando por $-j$ y $\frac{1}{-j}$

Si multiplicamos estos números complejos por $-j$ y $\frac{1}{-j}$, veremos lo siguiente:

- Multiplicar por $-j$ implica una rotación de 90° en el sentido horario.
- Multiplicar por $\frac{1}{-j}$ equivale a multiplicar por j, lo que corresponde a una rotación de 90° en el sentido antihorario.

Al aplicar estas transformaciones, se observará un cambio en la posición de los números complejos en el plano, con rotaciones que afectan su argumento.

*** Consideraciones**



Cuadrante	Signo de las coordenadas	Fórmula para el ángulo
1	$a > 0, b > 0$	$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$
2	$a < 0, b > 0$	$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$
3	$a < 0, b < 0$	$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$
4	$a > 0, b < 0$	$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ ($+\,2\pi$ si se desea el ángulo positivo)

- **Cuadrante 1:** Ambos a y b son positivos. El ángulo θ se calcula directamente con la fórmula $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$.
- **Cuadrante 2:** a es negativo y b es positivo. El ángulo θ se calcula con la fórmula $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$, ya que la función arcotangente no puede dar valores en el rango de 90° a 180°.
- **Cuadrante 3:** Ambos a y b son negativos. La fórmula es similar al cuadrante 2, con el ajuste de añadir π a la arcotangente.
- **Cuadrante 4:** a es positivo y b es negativo. El ángulo θ se calcula igual que en el primer cuadrante con $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$, ya que la función arcotangente da valores negativos en este cuadrante.