CURSO DE MATEMÁTICA 1.
Facultad de Ciencias

Repartido Teórico 1

Marzo de 2008

1. Conceptos Básicos de Funciones

Definiciones

1. Si A y B son conjuntos no vacíos, una **función** de A en B es una correspondencia tal que a cada elemento de A le hace corresponder uno y sólo un elemento de B. Al conjunto A se lo llama **dominio** de la función y a B el **codominio** y lo indicaremos por $\text{Dom}(f)$.

2. Al conjunto B se lo llama **codominio** de f. Escribiremos $f : A \to B$, y para un elemento $a \in A$, a su correspondiente lo llamamos $f(a)$.

3. El conjunto de valores "alcanzados" por la función f es el **recorrido** de f y lo escribimos $\text{Rec}(f) = \{f(a) : a \in A\} \subset B$. Por ejempllo, en la función de de la Figura 2, $\text{Rec}(f) = \{c, d\}$

   En este curso se trabajará con funciones cuyo dominio y codominio son subconjuntos de los números reales ($f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Si no se aclara el dominio de la función, tomaremos como dominio al mayor conjunto en $\mathbb{R}$ para el cual tenga sentido la expresion $f(x)$. Por ejemplo, si $f(x) = 1/x$, entonces $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q } x \neq 0\}$

4. Si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, el **gráfico** de f es el conjunto de puntos del plano con coordenadas de la forma $(a, f(a))$; es decir $\text{Gráfico}(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\}$.

5. Una función es **inyectiva** si a dos elementos distintos del dominio le hace corresponder elementos distintos del codominio. Es decir, si $a \neq b$ entonces $f(a) \neq f(b)$ (ver Figuras 1 y 2). Para funciones cuyo dominio y codominio son subconjuntos de los números reales, la inyectividad se puede ver fácilmente con el gráfico de f.

Una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es inyectiva si y sólo si, toda recta paralela al eje Ox corta al gráfico de f a lo sumo una vez.

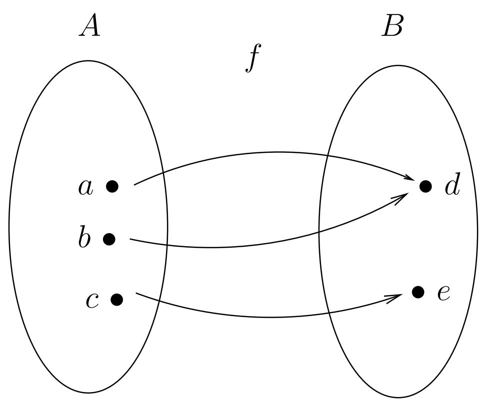


Figura 1: f no inyectiva y sobreyectiva

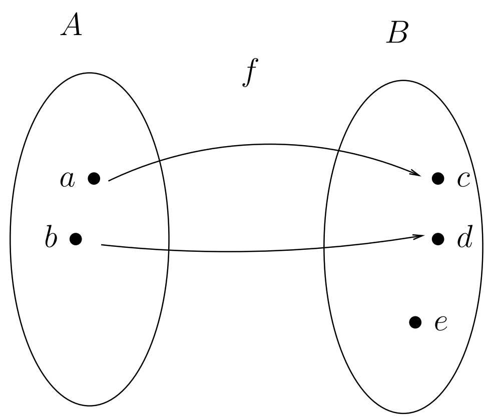


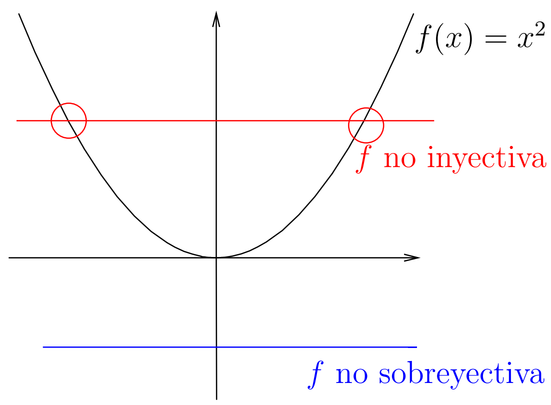
Figura 2: f inyectiva y no sobreyectiva

6. Una función $f : A \to B$ es **sobreyectiva** si todo elemento de B es "alcanzado" por f, Es decir, si $\forall\, b \in B$, $\exists\, a \in A$ tal que $f(a) = b$ (esto es lo mismo que decir qeue $\text{Rec}(f) = B$). Ver Figuras 1 y 2.

   Para funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la sobreyectividad se puede ver fácilmente con el gráfico de f.

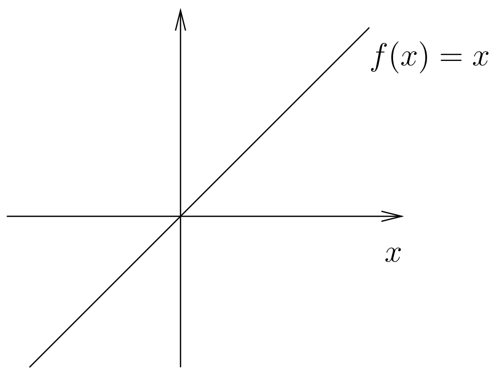
Una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es sobreyectiva si y sólo si, toda recta paralela al eje Ox, corta al gráfico de f por lo menos una vez.

   Ejemplo 1.1. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva:



7. Para cualquier conjunto A, tenemos la función *identidad en* A; $\text{Id}_A : A \to A$, dada por $\text{Id}_A(a) = a$. Si $A = \mathbb{R}$, entonces el gráfico de $\text{Id}_{\mathbb{R}}$ está dado por todos los

puntos del plano de la forma (x, x); por lo tanto el gráfico de esta función es la recta $y = x$:



La función Id_A es inyectiva y sobreyectiva.

8. Una función es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

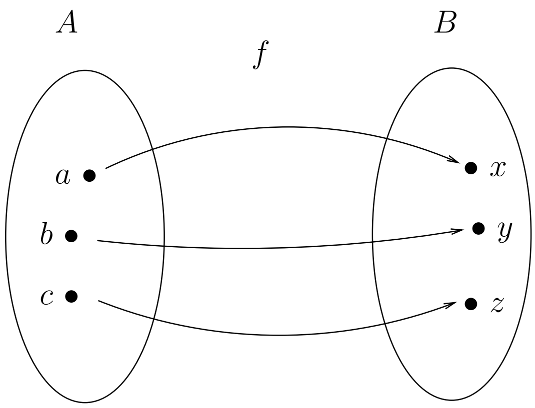
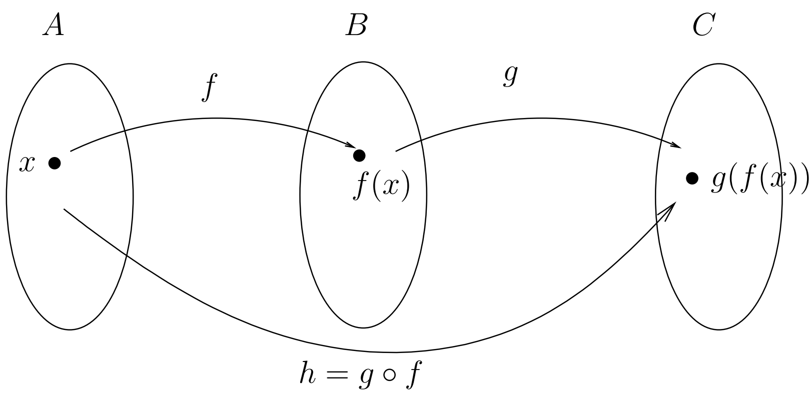


Figura 3: f biyectiva

9. Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$, podemos definir una nueva función $h : A \to C$. Si $a \in A$, entonces $f(a)$ cae dentro de B y por lo tanto a este valor le podemos aplicar la función g. Entonces, definimos $h(a) = g(f(a))$. A esta función h se la denota $g \circ f$ y decimos que es la **composición** de f con g.



Ejemplo 1.2. Si $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = x^2$, entonces:

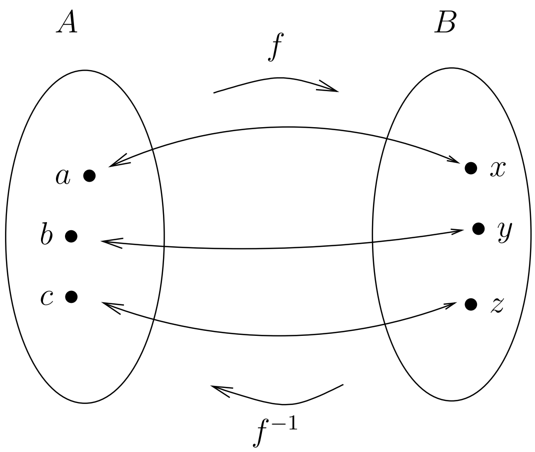
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(x^3 + 1\right) = (x^3 + 1)^2 + 2 = x^6 + 2x^3 + 3$$

y

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \left(x^2 + 2\right)^3 + 1 = x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 9.$$

Observar que en general $g \circ f \neq f \circ g$.

10. Si $f : A \to B$ es biyectiva, se puede **invertir** la correspondencia; definimos una nueva función $f^{-1} : B \to A$ dada de la siguiente forma: si $b = f(a)$ entonces $f^{-1}(b) = a$. Es decir, que f^{-1} "deshace" lo que f "hace". (¿ Por qué necesitamos que f sea biyectiva para definir f^{-1}?).



$f(a) = x,\ f^{-1}(x) = a$

$f(b) = y,\ f^{-1}(y) = b$

$f(c) = z,\ f^{-1}(z) = c$

Notar que $f^{-1}(f(a)) = a$ para todo $a \in A$ y $f(f^{-1}(b)) = b$ para todo $b \in B$; es decir

$$\boxed{f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A \text{ y } f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B.}$$

Observar que si un punto con coordenadas (a, b) está en el gráfico de la función f, esto quiere decir que $f(a) = b$ y por lo tanto $f^{-1}(b) = a$ y por lo tanto el punto con coordenadas (b, a) está en el gráfico de la función f^{-1}. Además, si simetrizamos el punto (a, b) con respecto la recta $y = x$, obtenemos el punto (b, a). Por lo tanto, el gráfico de la función f^{-1} se obtiene simetrizando el gráfico de f con respecto a la recta $y = x$.

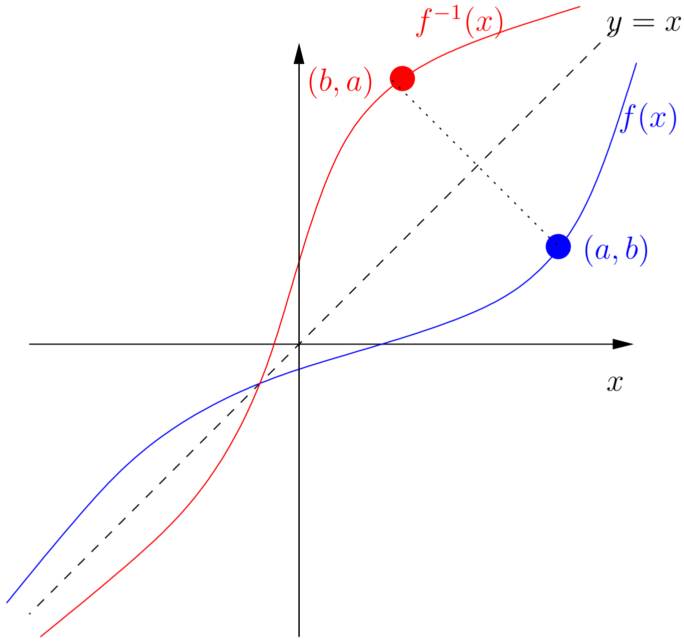


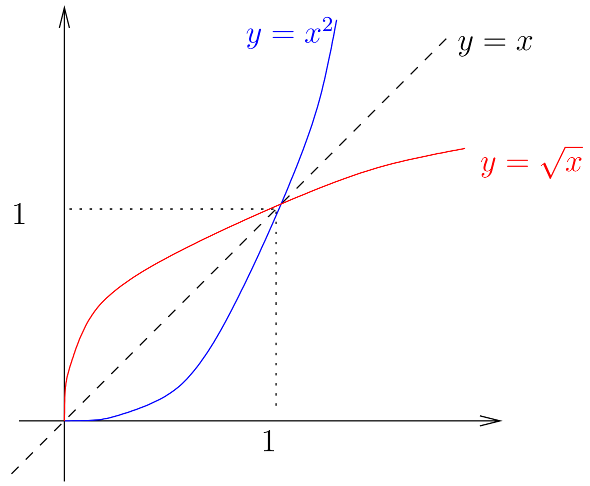
Figura 4: Gráfico de la función inversa

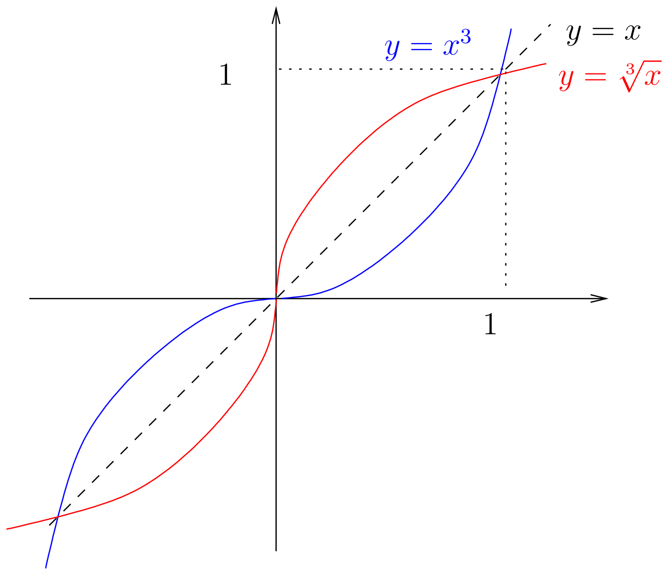
Ejemplo 1.3. Veamos algunos ejemplos de funciones inversas:

1. $f(x) = x^2$ no es inyectiva ni sobreyectiva. Sin embargo, si reducimos el dominio y el codominio: $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ entonces es biyectiva y por lo tanto tiene inversa $f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. ¿ Quien es la inversa de f? Tenemos que ver qué función deshace lo que hace f; es decir, qué funcion hay que aplicarle a x^2 para recuperar x...la raíz cuadrada. Entonces $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

2. $f(x) = x^3$ es biyectiva y por lo tanto tiene inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Igual que antes, vemos que $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Veamos a continuación los gráficos de $\sqrt{x}$ y $\sqrt[3]{x}$ a partir de los gráficos de x^2 y x^3 respectivamente.





Ejemplo 1.4. Veamos la función exponencial $f(x) = e^x$, esta función no es biyectiva pues no es sobreyectiva (toma sólo valores mayores que 0), pero sí es inyectiva (realizar el test de la línea horizontal en el gráfico). Por lo tanto, si consideramos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$,

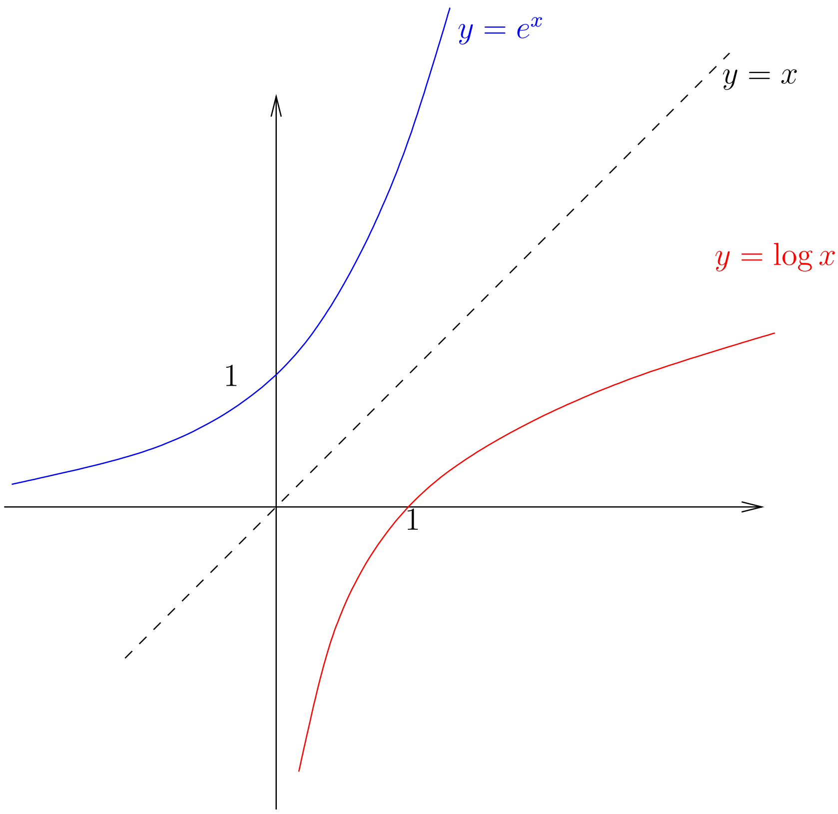
entonces es biyectiva y tiene inversa $f^{-1} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$. El nombre de la función inversa es el **logaritmo** natural (o neperanio, o en base e) y se denota $\log(x)$.

Observar que entonces tenemos que $log(a) = b \Leftrightarrow e^b = a$.

Utilizando que $\log(x)$ es la función inversa de e^x y las propiedades de la función exponencial, tenemos:

- $\mathrm{Dom}(\log) = \mathbb{R}_{>0}$
- $\log(1) = 0$
- $\log(a) + \log(b) = \log(ab)$
- $\log(a) - \log(b) = \log\left(\frac{a}{b}\right)$
- $n\log(a) = \log(a^n)$

Ahora construímos el gráfico de $\log(x)$ a partir del gráfico de e^x.

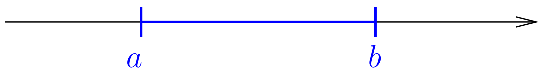


2. Límites y Continuidad

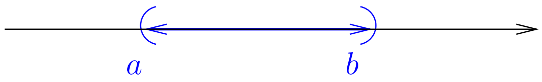
Repasamos las notaciones para los distintos tipos de intervalos de números reales:

1. Sean a y b dos números reales. Definimos:

   - $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$ (intervalo cerrado)

   - $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$ (intervalo abierto)

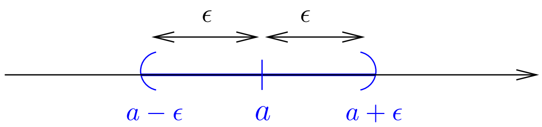
   

   - $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,/ a \leq x < b\}$
   - $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x\}$.

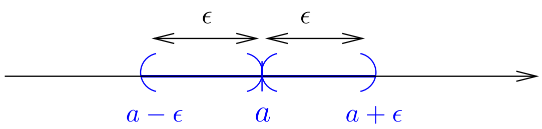
   Análogamente se definen $(a, b\,]$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$ y $[a, +\infty)$. En particular $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ y $(0, +\infty) = \mathbb{R}^+$.

2. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\epsilon \in \mathbb{R}^+$,

   - Llameremos **entorno de centro** a **y radio** ϵ al intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$. Lo notaremos $E(a, \epsilon)$.

   - Llamaremos **entorno *reducido* de centro** a **y radio** ϵ al intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ menos el punto a; es decir $E(a, \epsilon) - \{a\}$. Lo notaremos $E^*(a, \epsilon)$.

2.1. Límites

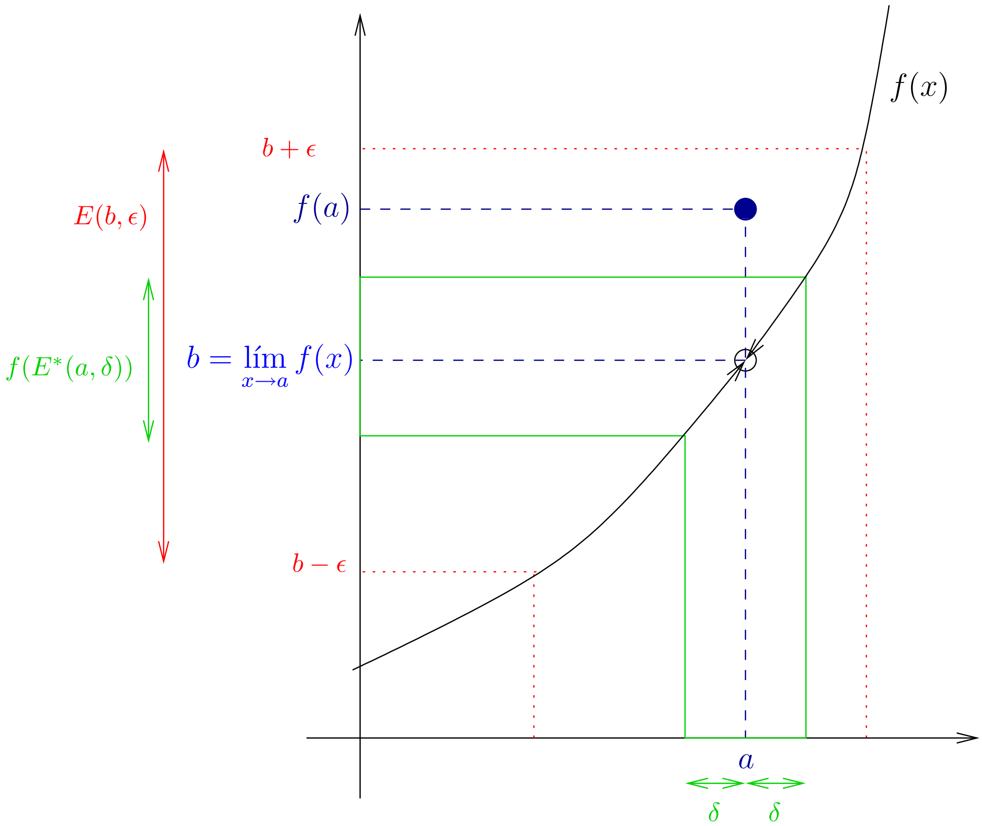
Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y a tal que un entorno reducido centrado en a está incluido en el dominio de f.

Definición 2.1. Decimos que el **límite de f cuando x tiende a a es b**, y lo denotamos

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in E^*(a, \delta)$, entonces $f(x) \in E(b, \epsilon)$.

Equivalentemente, si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(E^*(a, \delta)) \subset E(b, \epsilon)$.



Esto quiere decir, que no importa que tan chico sea el intervalo centrado en b (por eso, dado $\epsilon > 0$...), siempre podemos encontrar un intervalo centrado en a (existe δ...), tal que f lleva todos los puntos del intevalo, salvo quizás a, adentro del intervalo centrado en b. Es decir, cuanto más se acerca x a a (pero $x \neq a$), los valores de $f(x)$ se acercan a b.

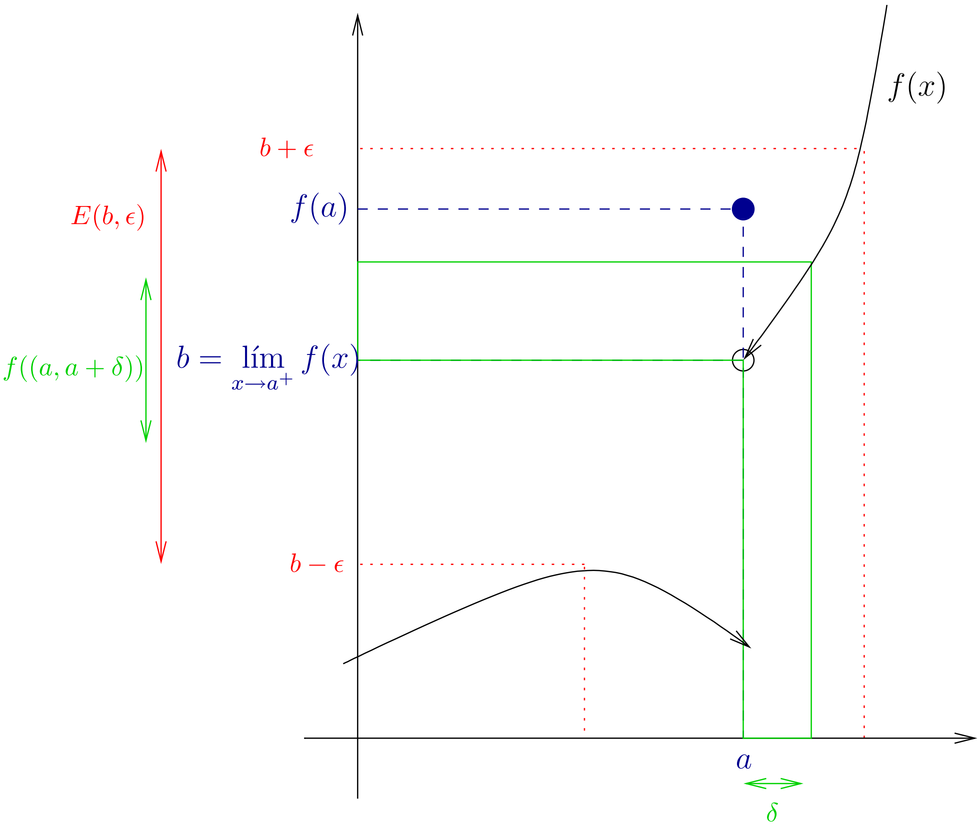
Observar que la definición no implica ni que f esté definida en a ni tampoco que si está definida, entonces $f(a) = b$. La definición de límite sólo involucra lo que sucede para valores cercanos a a, pero no involucra nada respecto a lo que sucede en a. Entender ésto es fundamental para entender el concepto de continuidad que veremos en la próxima sección.

Definición 2.2. Se puede ser un poco más específico, y estudiar el comportamiento de $f(x)$ para x cerca de a pero, por ejemplo, a la derecha de a. Definimos entonces los **límites laterales**.

- Decimos que el límite de f cuando x tiende a a **por la derecha** es b, y lo denotamos

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = b$$

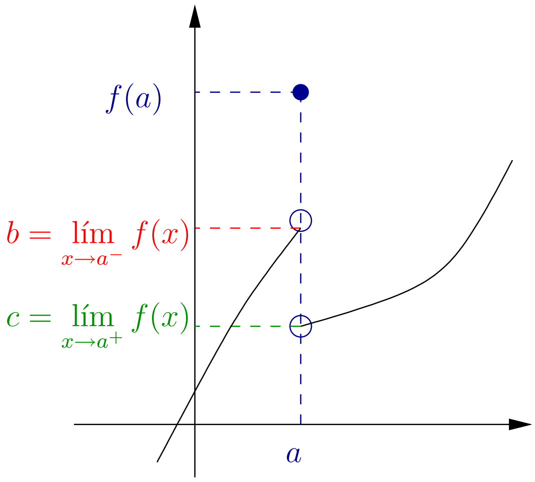
si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a, a+\delta)$, entonces $f(x) \in E(b, \epsilon)$.



- Decimos que el límite de f cuando x tiende a a **por la izquierda** es b, y lo denotamos

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = b$$

si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a-\delta, a)$, entonces $f(x) \in E(b,\epsilon)$.



Notar que

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to a^+} f(x) = b \\ \text{y} \\ \lim_{x\to a^-} f(x) = b. \end{cases}$$

Ejemplos

1. Si $f(x) = c$ (función constante), entonces

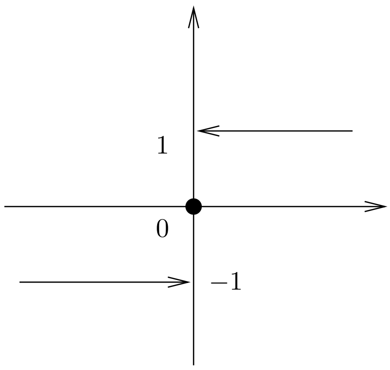
$$\lim_{x\to a} f(x) = c$$

   para todo $a \in \mathbb{R}$.

2. $\lim_{x\to a} x = a$

3. Definimos la función *signo*:

$$\mathrm{Sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Tenemos que

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{Sgn}(x) = 1$$

y

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{Sgn}(x) = -1.$$

En particular, $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{Sgn}(x)$ no existe.

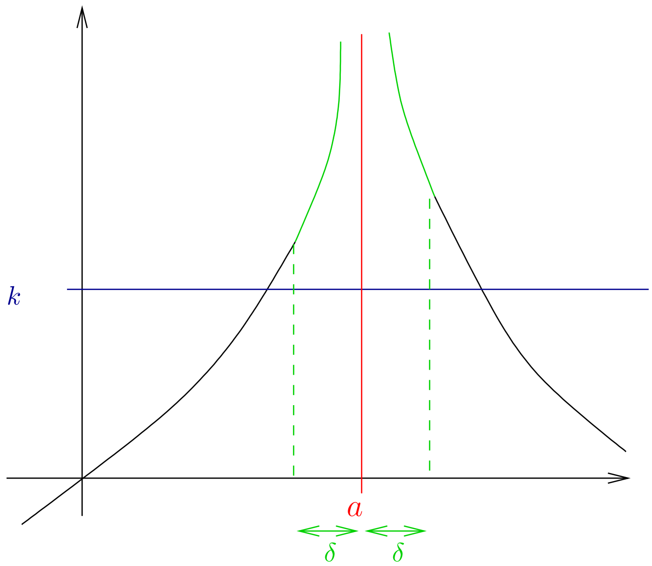
Límites infinitos

En algunos casos, cuando x se acerca a a, los valores de $f(x)$ si bien no se acercan a ningún valor, son, por ejemplo, cada vez más grandes:

- Decimos que el **límite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** a **es infinito**, y escribimos

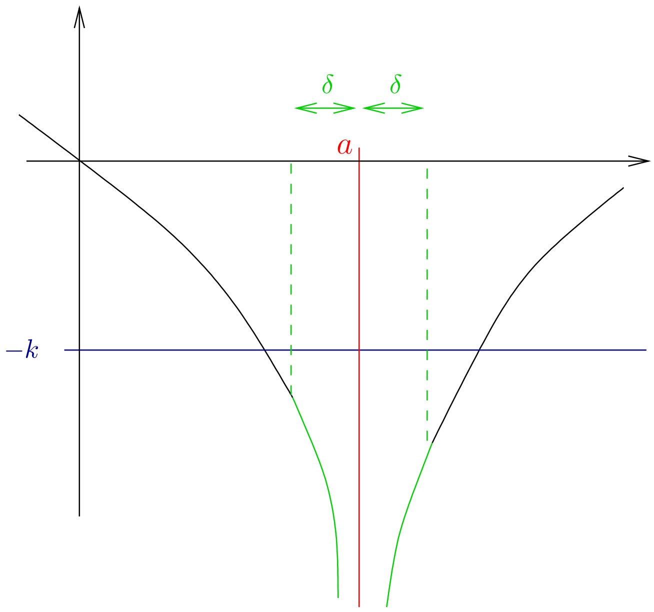
  $$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

  si dado $k > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in E^*(a,\delta)$, entonces $f(x) > k$. Esto quiere decir, que acercándonos lo suficiente a a (existe δ...), los valores de $f(x)$ son tan grande como queramos ($f(x) > k$).



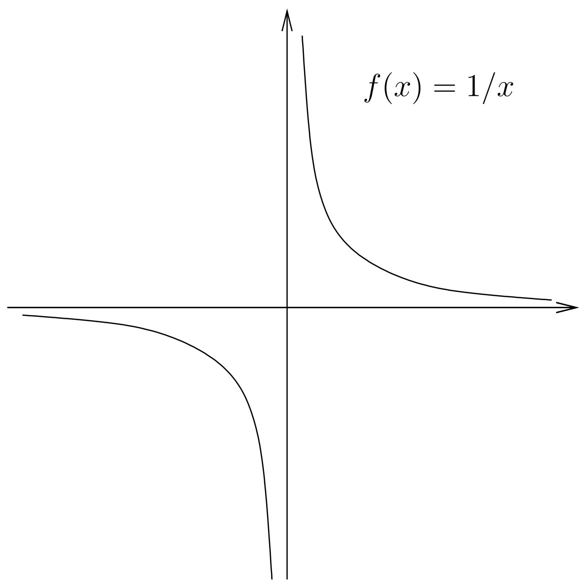
En todos los casos anteriores, decimos que la recta $x = a$ es una **asíntota vertical** para f.

- Análogamente, decimos que el **límite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** a **es menos infinito**, y escribimos
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$
si dado $k > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in E^*(a, \delta)$, entonces $f(x) < -k$.



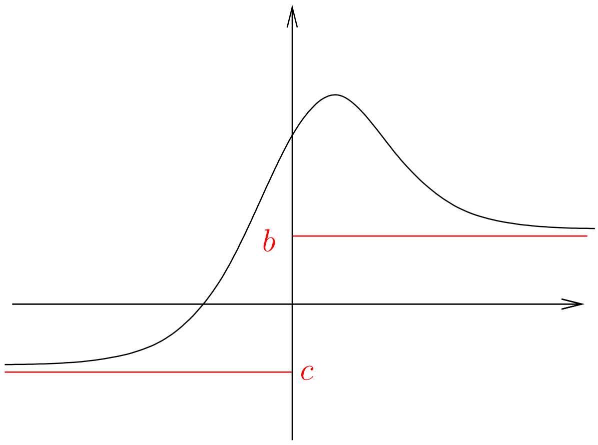
- También los límites laterales pueden ser $+\infty$ o $-\infty$. Por ejemplo, para $f(x) = 1/x$, tenemos que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty.$$



- Otro tipo de límites infinitos, es cuando estudiamos qué pasa con los valores de $f(x)$ cuando x toma valores cada vez mas grandes o cada vez mas chicos. Mostramos estos casos en las figuras. En este ejemplo tenemos que

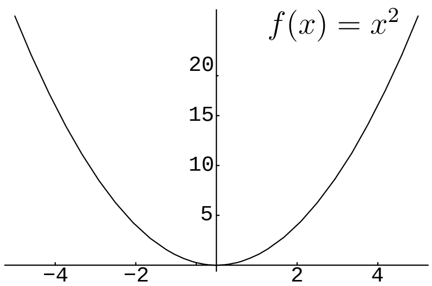
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = c.$$



En este caso decimos que las rectas $y = b$ e $y = c$ son **asíntotas horizontales** para f.

En el siguiente ejemplo, $f(x) = x^2$, notar que cuanto más grande son los valores de x, más grandes son los valores de $f(x)$. Y si x es un número negativo de valor absoluto grande, $f(x)$ es positivo y grande. Tenemos entonces que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$



Propiedades: las siguientes propiedades, si bien las escribimos para $x \to a$, valen también para límites laterales ($x \to a^+$ y $x \to a^-$), y para límites en infinito ($x \to +\infty$ y $x \to -\infty$).

1. $\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$

2. Si $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ son finitos, entonces:

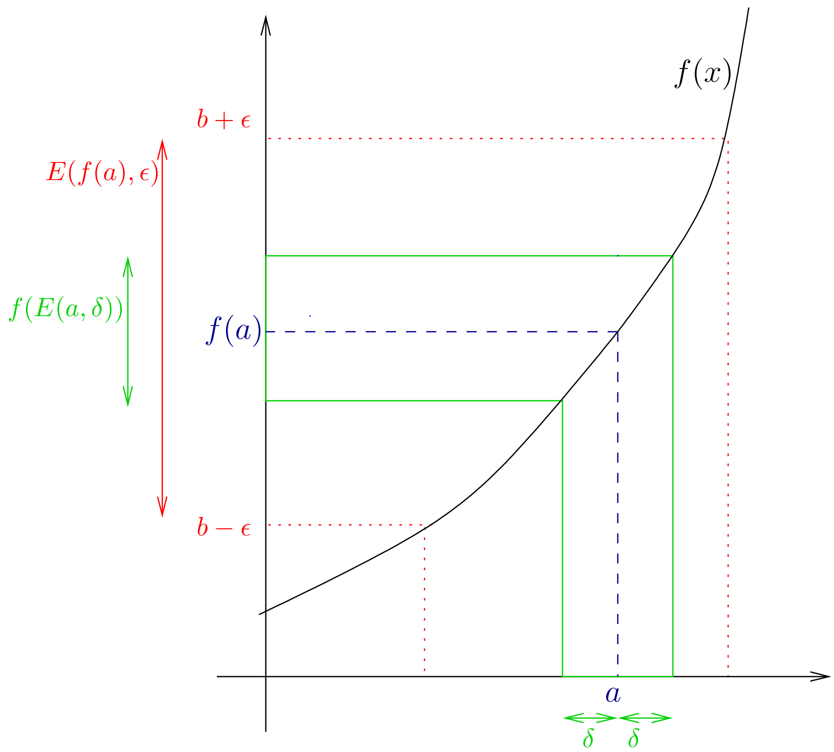
   - $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$.
   - $\lim_{x \to a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x)$
   - y si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$, entonces $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$.

2.2. Continuidad

La siguiente definición formaliza el hecho de que al dibujar el gráfico de la una función f por el punto con coordenada $x = a$, no se levanta el trazo para pasar de uno al otro lado de $x = a$.

Definición 2.3. Sean $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y $a \in D$. Decimos que f es **continua** en a, si y sólo si, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $f(D \cap E(f(a), \delta)) \subset E(f(a), \epsilon)$.

En otras palabras, f es continua en a si f lleva puntos del dominio cercanos a a, tan cerca como queramos de $f(a)$.



La definición implica que si f es continua en a, entonces f está definida en a ($a \in D$.) Si a es un punto con un entorno centrado en a incluído en el dominio de f, entonces:

$$\boxed{f \text{ es continua en } a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a).}$$

Esto significa que se satisfacen las siguientes 3 propiedades:

1. $f(a)$ existe
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe (y es finito)
3. los dos valores anteriores son iguales, es decir, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Notar que pueden ser verdaderas (1) y (2) y sin embargo f no ser continua en a. Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

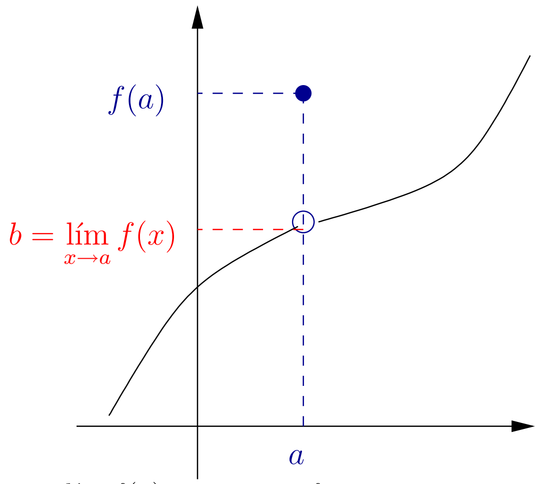
En este ejemplo

1. $f(0) = 0$ (dato)
2. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x + 1 = 1$.
3. $\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$ y por lo tanto f no es continua en 0.

Pero si definimos

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

entonces g es continua en $x = 0$.



$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe pero f no es continua en a

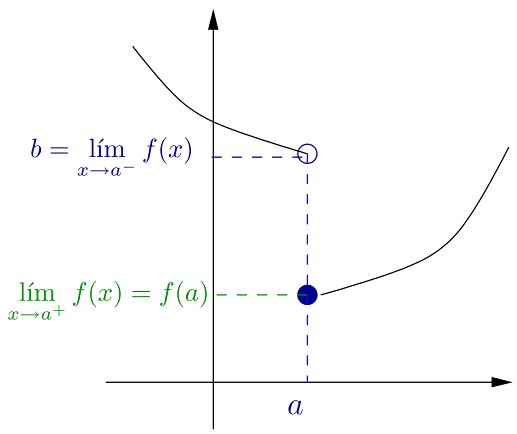
Decimos que f es **continua en un conjunto A** si f es continua en A para todo $a \in A$.

Continuidad lateral.

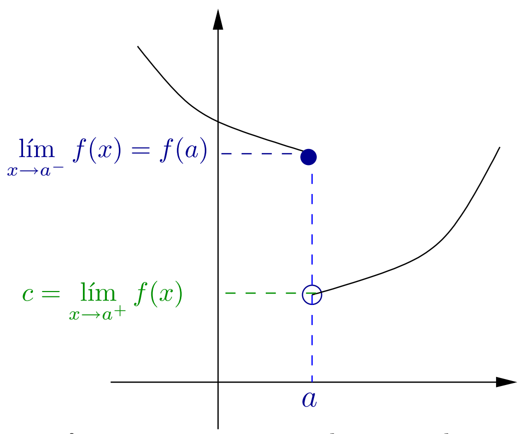
Si por ejemplo, f está definida sólo para $x \geq a$, entonces f es continua en a si y sólo si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Si nos interesa saber que pasa con los valores de $f(x)$ cuando x se acerca a a por la derecha o por la izquierda, tenemos las siguientes definiciones:

- f es continua en a **por la derecha** $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
- f es continua en a **por la izquierda** $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$



f es continua en a por la derecha pero no por la izquierda



f es continua en a por la izquierda, pero no por la derecha

Igual que para la continuidad bilateral, la continuidad lateral implica 3 aserciones. Por ejemplo, para continuidad por la derecha:

$$f \text{ es continua por la derecha en } a \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \;\; f(a) \text{ existe} \\ \bullet \;\; \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \text{ existe y es finito} \\ \bullet \;\; \text{los dos valores anteriores coinciden} \end{cases}$$

Observación 2.4. Si a es interior al dominio de f, tenemos:

$$\begin{aligned} f \text{ es continua en } a \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} f \text{ es continua en } a \text{ por la derecha} \\ \qquad \text{y} \\ f \text{ es continua en } a \text{ por la izquierda} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \end{aligned}$$

Proposición 2.5. *SI f y g son funciones continuas en a y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces:*

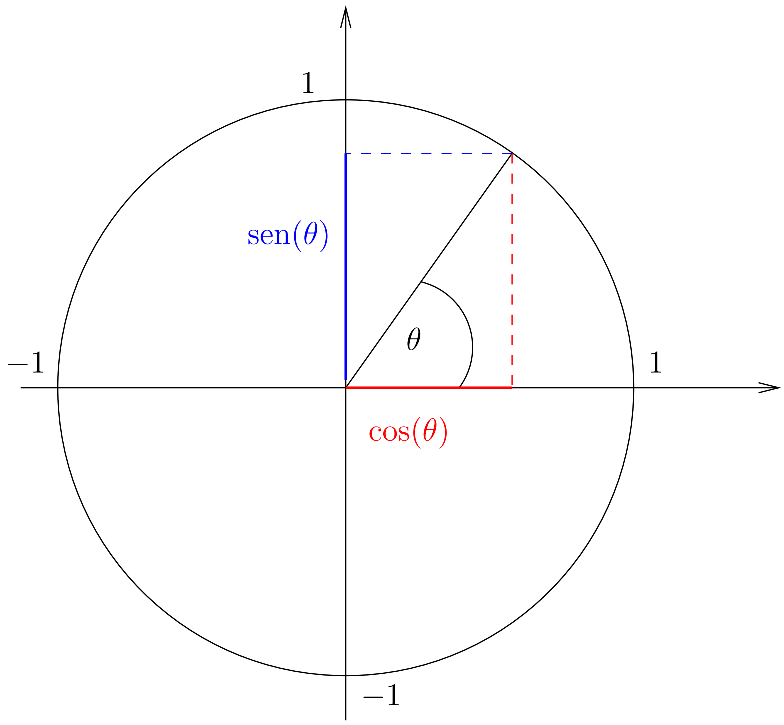
1. *$\alpha f + \beta g$ es continua en a*
2. *fg es continua en a*
3. *si $g(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ es continua en a*

Esta proposición es consecuencia de las propiedades de linealidad, producto y cociente de los límites.

Ejemplo 2.6. Veamos algunos ejemplos de funciones continuas:

- Es fácil ver que la las funciones constantes son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- $f(x) = x$ es continua en todo $\mathbb{R}$
- Por (2) de la proposición anterior, tenemos entonces que si n es un entero positivo, $f(x) = x^n$ es continua en $\mathbb{R}$.
- Y por lo tanto, por (1) de la proposición, tenemos que los polinomios son continuos en todo $\mathbb{R}$
- $f(x) = e^x$ es continua en todo $\mathbb{R}$.
- $f(x) = \log(x)$ es continua en su dominio; es decir, es continua en $\mathbb{R}^+$.

Otro ejemplo de funciones continuas son las **funciones trigonométricas**. Dado un ángulo θ en radianes, definimos su **seno** y **coseno** según la siguiente figura:



Es decir, que $(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))$ son las coordenadas del punto de intersección de la semirecta que forma ángulo θ con el eje Ox y el círculo centrado en el origen y radio 1.

Observar, que por el Teorema de Pitágoras y dado que el radio del círulo es 1 (y por lo tanto la medida de la hipotenusa es 1), tenemos que

$$(\operatorname{sen}(\theta))^2 + (\cos(\theta))^2 = 1$$

Ejercicio 2.7. Completar la siguiente tabla:

θ	$\cos(\theta)$	$\operatorname{sen}(\theta)$
0	1	0
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	
$\pi/2$	0	
π		
$3\pi/2$	0	
$7\pi/2$	0	
$-\pi/2$		
$-\theta$		$-\operatorname{sen}(\theta)$
$\theta+\pi$		$-\operatorname{sen}(\theta)$
$\pi-\theta$		

Veamos los gráficos de $\sin(x)$ y $\cos(x)$:

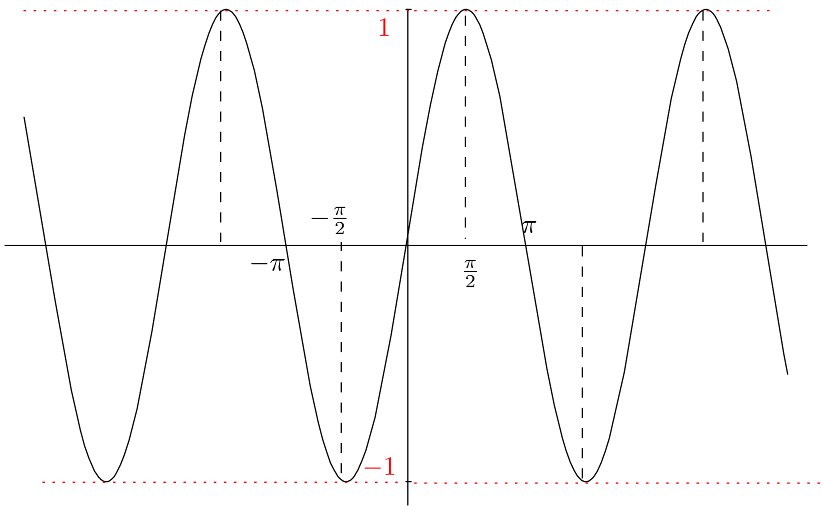


Gráfico de $\text{sen}(x)$

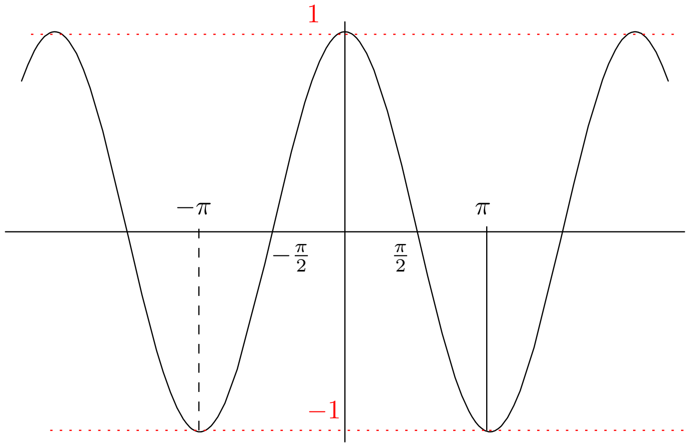


Gráfico de $\cos(x)$

Observar que $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{sen}(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(x)$ no existen pues éstas funciones oscilan. Ambas funciones son continuas en $\mathbb{R}$.

Para valores de θ tal que $\cos(\theta) \neq 0$, podemos definir la **tangente** del ángulo θ

$$\tan(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

Veamos el gráfico de esta función':

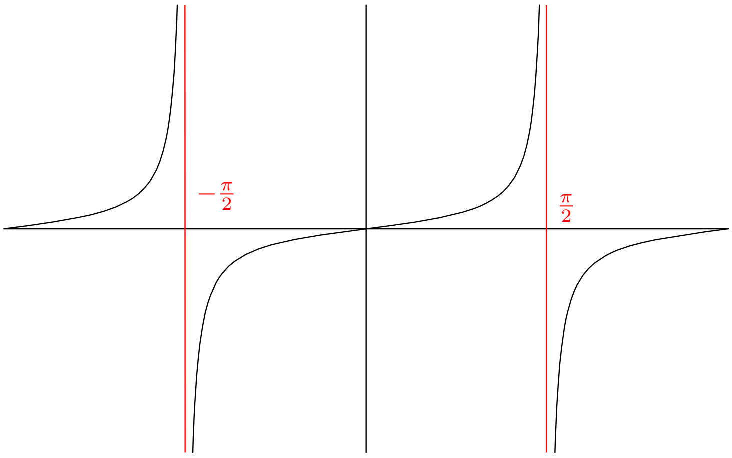


Gráfico de $\tan(x)$

Observar que $\tan(x)$ es continua en x, para todo $x \neq -\dfrac{\pi}{2}, -3\dfrac{\pi}{2}, \cdots$ y $x \neq \dfrac{\pi}{2}, 3\dfrac{\pi}{2} \cdots$. Observar también que

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty \quad \text{ y } \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty.$$

Proposición 2.8 (Continuidad de la función compuesta)**.** *Sean f y g dos funciones tales que $Rec(f) \subset Dom(g)$. Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, entoces $g \circ f$ es continua en a.*

Demostración. Como f es continua en a,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Es decir, que si $y = f(x)$ y $x \to a$, entonces $y \to f(a)$. Como g es continua en $f(a)$, tenemos que

$$\lim_{y \to f(a)} g(y) = g(f(a)).$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = \lim_{y \to f(a)} g(y) = g(f(a))$$

y $g \circ f$ es continua en a □

Theorem 2.9 (Teorema del Valor Intermedio)**.** *Si f es continua en $[a, b]$ y p es un número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = p$*

Es decir, si f es continua en $[a, b]$, entonces f tomo todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$.

Corolario 2.10 (Teorema de Bolzano)**.** *Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. (Es decir, si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos diferentes, entonces f se anula en algún punto entre a y b).*

Demostración. Si $f(a)f(b) < 0$, entonces $p = 0$ es un número entre $f(a)$ y $f(b)$; el Teorema del Valor Intermedio, nos dice entonces que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. $\square$

Ejemplo 2.11. Todo polinomio f de coeficientes reales y grado <u>impar</u> tiene al menos una raíz real. Supongamos que el coeficiente de mayor grado es positivo. Entonces

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

y por lo tanto, existe $b > 0$ tal que $f(b) > 0$. Por otro lado

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

y por lo tanto, existe $a < 0$ tal que $f(a) < 0$. Por el Teorema de Bolzano, por ser f continua en $\mathbb{R}$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.