

Teoría de circuitos

Segundo Parcial

CURE

15 de Julio de 2022

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá comenzar cada problema o pregunta en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.

Problema 1 [15 pts.]

Sea el cuadripolo de la figura 1

- Determine si el cuadripolo es recíproco
- Determine si el cuadripolo es simétrico
- Halle la transferencia del circuito en régimen sinusoidal, en circuito abierto $\frac{V_o(j\omega)}{V_{in}(j\omega)}$. (sin hacer cuentas)
- Sea un sistema en régimen de corriente continua cuyo circuito es el cuadripolo de la figura, donde Z_1 , Z_2 y Z_3 son una resistencia (R_1), un capacitor (C) y otra resistencia (R_2) respectivamente.

En el puerto de entrada se conecta una batería (V_s) de 5V, capaz de abastecer una corriente máxima de 2A y en el puerto de salida se conecta una carga resistiva (R_L).

Enuncie el teorema de Tellegen y aplíquelo a este caso para hallar el valor máximo de R_L tal que la potencia consumida por ella nunca supere un cuarto del valor de potencia máxima que puede brindar la batería.

NOTA: $R_1 = R_2 = 1k\Omega$

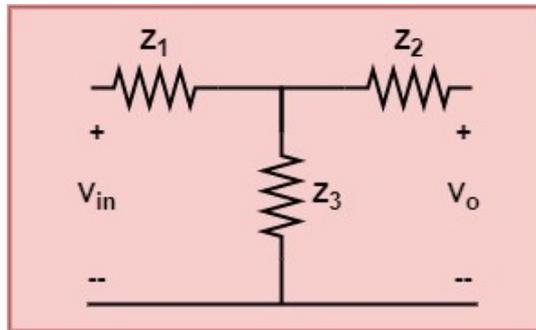


Figura 1: Cuadripolo

Problema 2 [15 pts.]

El circuito de la figura corresponde a un Filtro Analógico de Estado Variable y se supone que $R_\zeta > \frac{R}{2}$.

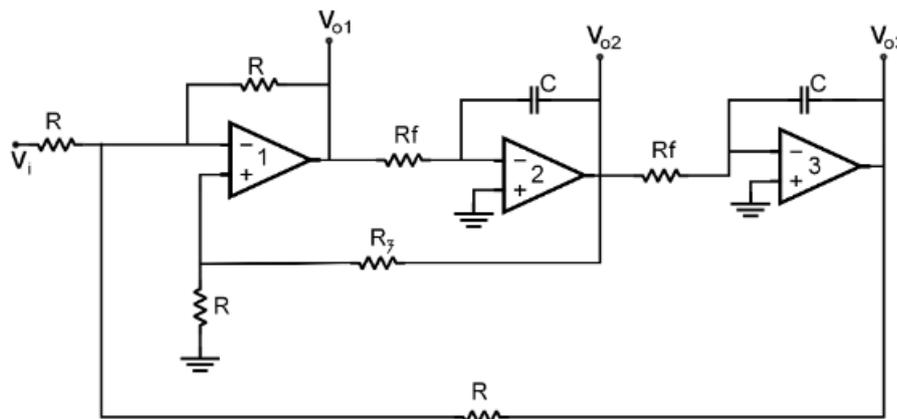


Figura 2:

- Calcular la transferencia $H_1(s) = \frac{V_{o1}(s)}{V_i(s)}$.
- Calcular la transferencia $H_2(s) = \frac{V_{o2}(s)}{V_i(s)}$.
- Calcular la transferencia $H_3(s) = \frac{V_{o3}(s)}{V_i(s)}$.
- Para cada una de las transferencias halladas en las partes anteriores, bosqueje su respuesta en frecuencia e indique a qué filtro corresponde.

Se conecta ahora cada salida del circuito en cuestión, a las entradas correspondientes del circuito de la Figura 2 con a, b y c variables:

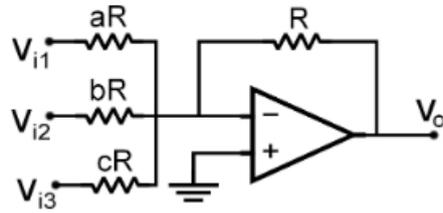


Figura 3:

- (e) ¿Qué aplicación le halla a la configuración lograda?

Problema 3 [10 pts.]

- (a) Defina estabilidad BIBO y explique las características ideales del A.O.
 (b) Halle $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.
 (c) Defina el bloque y estudie estabilidad.

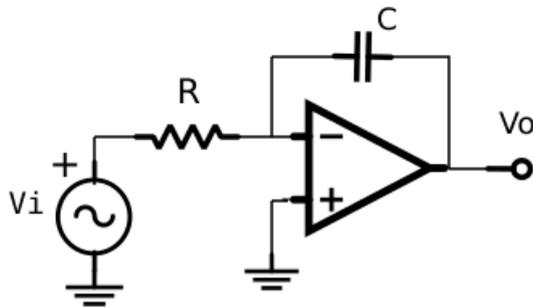


Figura 4:

Solución Problema 1

- (a) Dado que el cuadripolo no tiene fuentes dependientes debe ser recíproco. De igual forma esto se puede verificar fácilmente si $z_{12} = z_{21}$.

$z_{12} = \frac{V_1}{I_2}$ con $I_1 = 0$. Como $I_1 = 0$ V_1 es igual al voltaje en Z_3 por lo tanto $z_{12} = \frac{V_1}{I_2} = Z_3$. Razonando de forma análoga se obtiene que $z_{21} = \frac{V_2}{I_1}$ con $I_2 = 0$ es igual a Z_3 lo cual demuestra que el cuadripolo ES RECÍPROCO.

- (b) Para saber si es simétrico verifico que $z_{11} = z_{22}$ $z_{11} = \frac{V_1}{I_1}$ con $I_2 = 0$ entonces $z_{11} = Z_1 + Z_3$. Luego $z_{22} = \frac{V_2}{I_2}$ con $I_1 = 0$ entonces $z_{22} = Z_2 + Z_3$. Por lo tanto el cuadripolo NO es SIMÉTRICO

- (c) Recordando las constantes generales (A,B,C,D) se sabe que la transferencia del circuito desde el puerto de entrada al puerto de salida, en vacío ($I_2 = 0$) viene dada por la expresión $H(s) = \frac{1}{A}$. Por otro lado se sabe que $A = \frac{z_{11}}{z_{21}} = \frac{Z_1 + Z_3}{Z_3}$, por lo tanto $H(s) = \frac{Z_3}{Z_1 + Z_3}$

- (d) Ver enunciado en las diapositivas del curso.

La potencia consumida por la resistencia de carga es $P_{R_L} = R_L I_{R_L}^2 \leq \frac{P_{S_{max}}}{4}$. Por otro lado el teorema de Tellegen nos dice que $P_S = \sum_{i=1}^n P_i$ donde los P_i son las potencias consumidas por cada componente del circuito a excepción de la fuente. Además se dice que el circuito se encuentra en régimen de corriente continua por lo cual $i_C = 0 \implies P_C = 0$. Por lo tanto

$$P_S = P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_L} = R_1 I^2 + R_2 I^2 + R_L I^2 = (R_1 + R_2 + R_L) I_{R_L}^2.$$

Luego $P_{R_L} = R_L I_{R_L}^2 \leq \frac{P_{S_{max}}}{4} \iff R_L \left(\frac{P_S}{R_1 + R_2 + R_L} \right) \leq \frac{P_{S_{max}}}{4}$. El resultado recuadrado es válido para cualquier valor de corriente, en particular para la corriente máxima que puede entregar la fuente, la cual se obtiene en el caso de que $P_S = P_{S_{max}}$. Por esto último se tiene que $R_L \left(\frac{P_{S_{max}}}{R_1 + R_2 + R_L} \right) \leq \frac{P_{S_{max}}}{4} \iff R_L \leq \frac{R_1 + R_2 + R_L}{4} \iff \frac{3R_L}{4} \leq \frac{R_1 + R_2}{4} \iff R_L \leq \frac{R_1 + R_2}{3} \simeq 667\Omega$

Solución Problema 3

- (a) Se dice que un sistema lineal es BIBO estable cuando para toda entrada acotada la respuesta del sistema también es acotada
- (b) El circuito ilustra un bloque integrador por lo cual $H(s) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{1}{RCs}$
- (c) Una condición necesaria y suficiente para que el sistema sea BIBO estable es que ningún polo de su función de transferencia se encuentre sobre el semiplano $\{\mathbb{C}^+\}$. En este caso se tiene un unico polo en $s=0$ por lo cual el sistema no es BIBO estable

Solución Problema 2

(a) Sean las corrientes I_1, I_2, I_3 y el voltaje V_A los de la figura ??. Podemos plantear rápidamente las siguientes ecuaciones:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \Rightarrow \frac{V_i - V_A}{R} + \frac{V_{o1} - V_A}{R} + \frac{V_{o2} - V_A}{R} = 0 \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} V_{o2} &= -\frac{1}{R_f C s} V_{o1} \\ V_{o3} &= -\frac{1}{R_f C s} V_{o2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_{o3} = \frac{1}{(R_f C s)^2} V_{o1} \quad (2)$$

Además:

$$V_A = \frac{R}{R + R_\zeta} V_{o2} = -\frac{R}{R_f C s (R + R_\zeta)} V_{o1} \quad (3)$$

De (1), (2) y (3):

$$V_i + V_{o1} + \frac{1}{(R_f C s)^2} V_{o1} + \frac{3R}{R_f C s (R_\zeta + R)} V_{o1} = 0$$

Operando adecuadamente:

$$H_1(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{3R}{R_f C (R_\zeta + R)} + \left(\frac{1}{R_f C}\right)^2}$$

(b) De la parte anterior y (2) concluimos que:

$$H_2(s) = -\frac{\left(\frac{1}{R_f C}\right)s}{s^2 + \frac{3R}{R_f C (R_\zeta + R)} + \left(\frac{1}{R_f C}\right)^2}$$

(c) De las partes (a) y (b) y de la ecuación (2) vemos que:

$$H_3(s) = \frac{\left(\frac{1}{R_f C}\right)^2}{s^2 + \frac{3R}{R_f C(R_\zeta + R)}s + \left(\frac{1}{R_f C}\right)^2}$$

(d) Sean $\omega_0 = \frac{1}{R_f C}$ y $\zeta = \frac{3R}{2(R_\zeta + R)} < 1$. Tendremos en todos los casos polos complejos conjugados.

$$H_1(j\omega) = \frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_0 j\omega + \omega_0^2}$$

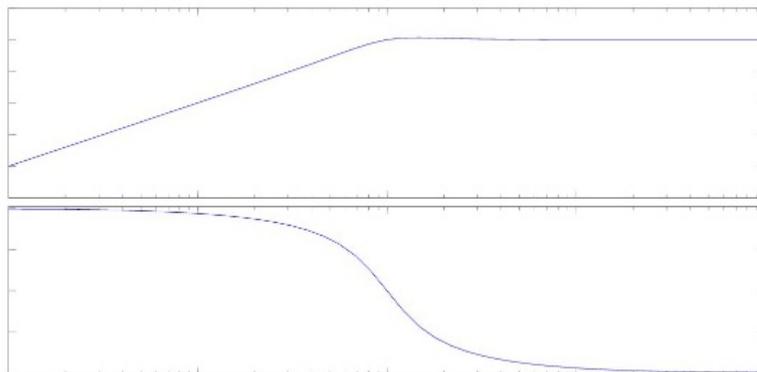
▪ $\omega \ll \omega_0$: $H(j\omega) \approx \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}$

$$\begin{aligned} \angle H(j\omega) &= \pi \\ |H(j\omega)|_{dB} &= 40 \log(\omega) - 40 \log(\omega_0) \end{aligned}$$

▪ $\omega \gg \omega_0$: $H(j\omega) \approx 1$

$$\begin{aligned} \angle H(j\omega) &= 0 \\ |H(j\omega)|_{dB} &= 0 \end{aligned}$$

En la figura se muestran los diagramas de bode **reales** de $H_1(j\omega)$. Véase que se trata de un filtro pasaaltos con frecuencia de corte ω_0 .



$$H_2(j\omega) = \frac{\omega_0 j\omega}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_0 j\omega + \omega_0^2}$$

- $\omega \ll \omega_0$: $H(j\omega) \approx \frac{j\omega}{\omega_0}$

$$\begin{aligned} \angle H(j\omega) &= \frac{\pi}{2} \\ |H(j\omega)|_{dB} &= 20 \cdot \log(\omega) - 20 \cdot \log(\omega_0) \end{aligned}$$

- $\omega \gg \omega_0$: $H(j\omega) \approx \frac{\omega_0}{j\omega}$

$$\begin{aligned} \angle H(j\omega) &= -\frac{\pi}{2} \\ |H(j\omega)|_{dB} &= 20 \cdot \log(\omega_0) - 20 \cdot \log(\omega) \end{aligned}$$

En la figura se muestran los diagramas de bode reales de $H_2(j\omega)$. Véase que se trata de un filtro pasabanda con frecuencia central ω_0 .

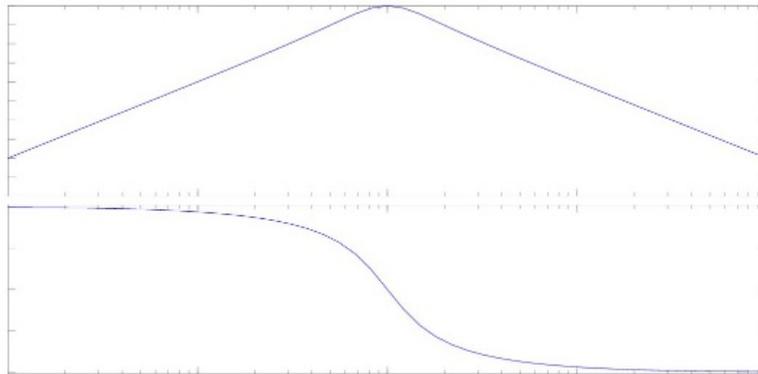


Figura 16: Diagramas de bode reales de módulo (arriba) y fase (abajo) de $H_2(j\omega)$.

$$H_3(j\omega) = \frac{\omega_0^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_0 j\omega + \omega_0^2}$$

- $\omega \ll \omega_0$: $H(j\omega) \approx 1$

$$\begin{aligned} \angle H(j\omega) &= 0 \\ |H(j\omega)|_{dB} &= 0 \end{aligned}$$

- $\omega \gg \omega_0$: $H(j\omega) \approx \frac{\omega_0^2}{(j\omega)^2}$

$$\begin{aligned} \angle H(j\omega) &= -\pi \\ |H(j\omega)|_{dB} &= 40 \cdot \log(\omega_0) - 40 \cdot \log(\omega) \end{aligned}$$

En la figura se muestran los diagramas de bode **reales** de $H_3(j\omega)$. Véase que se trata de un filtro pasabajos con frecuencia de corte ω_0 .

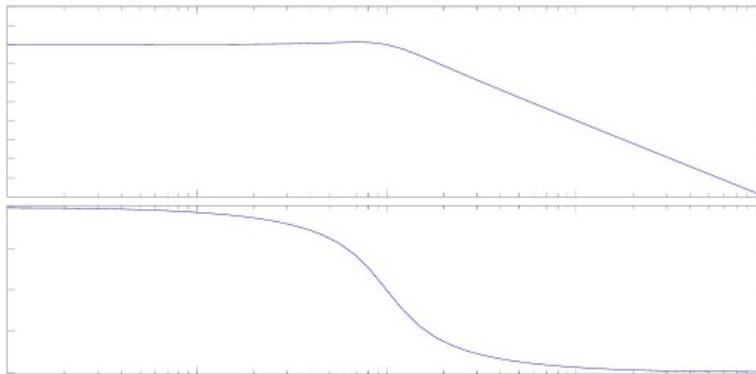


Figura 17: Diagramas de bode reales de módulo (arriba) y fase (abajo) de $H_3(j\omega)$.

(e) ¡Un ecualizador!