Teoría de circuitos
Segundo Parcial

CURE

12 de julio de 2014

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.

Problema 1 [24 pts.]

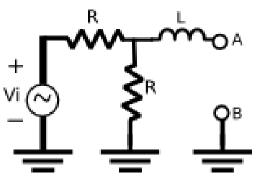


Figura 1

Se pide:

(a) Para la Figura 1, realizar el equivalente Thevenin desde las terminales A y B siendo nula la corriente por la bobina en $t = 0$.

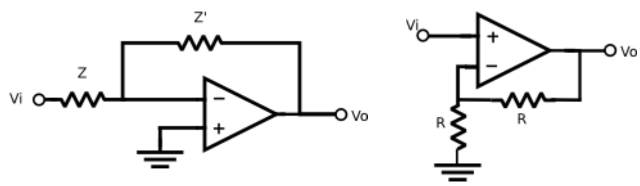


Figura 2

(b) Hallar las transferencias $H(s) = \frac{V_o}{V_i}$ para los circuitos de las figuras 2, explicando los cálculos realizados e identificando las configuraciones.

(c) En el circuito de la figura 4, identificar bloques y hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o}{V_i}$.

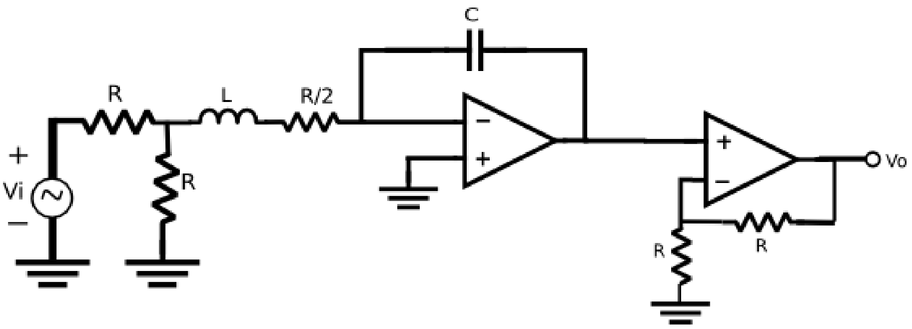


Figura 4

(d) Sea la entrada $v_i(t) = Y(t)$. Hallar $v_o(t)$.

(e) ¿Podría concluir algo respecto a la estabilidad BIBO de este sistema utilizando solamente la definición?

Problema 2 [18 pts.]

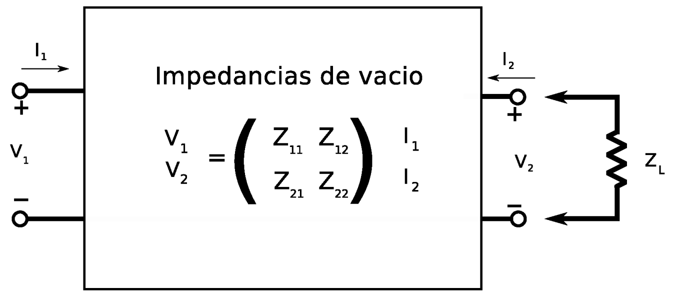


Figura 5

Dada la descripción de un cuadripolo por sus impedancias de vacío y al cual se conecta una impedancia Z_L, se pide:

(a) Calcular la transferencia $H(s) = \frac{V_o}{V_i}$.

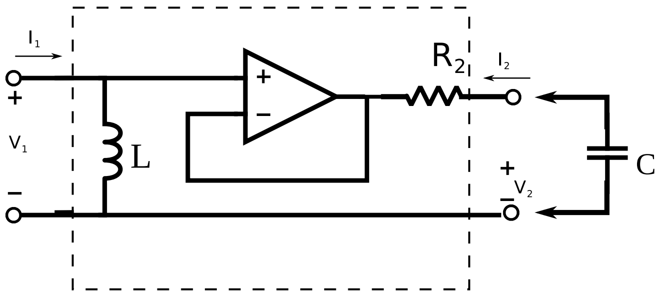


Figura 6

(b) Calcular las impedancias de vacío para el cuadripolo de la figura 6

(c) Calcular la transferencia del cuadripolo de la figura 6 al cual se le conecta un capacitor C

(d) ¿El sistema es BIBO estable?

Problema 3 [18 pts.]

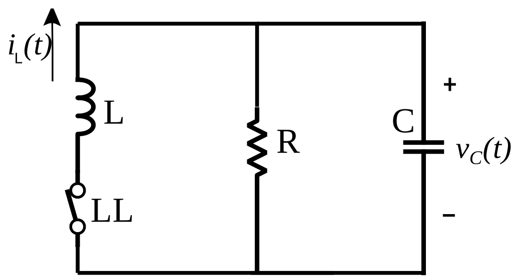


Figura 7

Considere el circuito de la figura 7, en donde la llave se encuentra cerrada y asuma que la corriente inicial por la bobina es i_{L0} y el condensador esta descargado. Se cumple además que: $\frac{1}{LC} = \omega_n^2$ y $\frac{1}{RC} = \frac{R}{L} = \omega_n$.

(a) Calcula el valor del voltaje $V_c(S)$ y la intensidad $I_L(s)$ en el dominio de Laplace.

(b) Calcula y bosqueje el valor del voltaje $v_c(t)$ en el dominio del tiempo para $t > 0$.

La llave LL se abre en el $t^* = \frac{\pi}{\sqrt{3}\omega_n}$, instante en donde se da el máximo de $v_c(t)$.

(c) Calcula el valor del voltaje $V_c(s)$ en el dominio de Laplace.

(d) Calcula y bosqueje el valor del voltaje $v_c(t)$ en el dominio del tiempo teniendo en cuenta el efecto de la llave

Solución

Problema 1

(a) Calculamos primero el voltaje de vacío, V_{AB}.

$V_{AB} = \frac{R}{R+R}V_i = \frac{V_i}{2}$

Consideramos ahora la impedancia viste desde las terminales A y B, cortocircuitando la fuente:

$$Z_v = [Ls + R//R] = Ls + \frac{R}{2}$$

(b) Consideremos el circuito de la figura 2. En este caso tenemos la configuración inversora. Utilizando el modelo de amplificador ideal, en ambos bornes del amplificador el voltaje se iguala y no ingresa corriente.

$$e_- = e_+ = 0$$

$$I_z = \frac{V_i}{z}$$

Luego, $I_{z'} = \frac{V_o}{z'}$
Obtenemos: $H(s) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{z'}{z}$.
Consideremos ahora el circuito de la figura 3. Reconocemos al amplificador en la configuración no inversora. De manera análoga obtenemos $H(s) = \frac{V_o}{V_i} = 2$.

(c) Comenzamos identificando el circuito de la parte a), el cual podemos expresar simplificadamente como el voltaje de vacío y la impedancia vista. Luego reconocemos un amplificador inversor y un amplificador no inversor, cuyas transferencias ya hallamos en la parte b), siendo $V_{AB} = \frac{V_i}{2}$, $z = \frac{1}{Cs}$ y $z = z_{AB} + \frac{R}{2} = R + Ls$.
Llamemos V_1 la tensión de salida del amplificador inversor. Luego tenemos que la transferencia $H_1(s) = \frac{V_1}{V_{AB}} = -\frac{1}{Cs(R+Ls)}$. Como vimos, la transferencia $H_2(s) = \frac{V_o}{V_1} = 2$. Reemplazando V_{AB} por V_i y multiplicando las transferencias, obtenemos finalmente:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{V_o}{V_1} * \frac{V_1}{V_{AB}} * \frac{V_{AB}}{V_i} = -\frac{1}{Cs(R+Ls)}$$

(d) Transformando la entrada tenemos: $V_i = \frac{1}{s}$. Luego la salida será:

$$V_o = H(s)V_i = -\frac{1}{(R+Ls)Cs^2}$$

Antitransformando (usando la fórmula 15 en la tabla de transformadas), obtenemos:

$$v_o(t) = \frac{1}{RC}\frac{L}{R}(\frac{R}{L}t - 1 - e^{-t\frac{R}{L}})$$

(e) La definición de estabilidad BIBO es que ante una entrada acotada, la salida del sistema sea acotada. Como vimos en la parte anterior, al tener una entrada acotada (Y(t), el escalón de Heavyside, es acotada), obtuvimos una salida no-acotada. Por definición, este sistema no es BIBO estable.

Problema 2

(a) La transferencia de este sistema vale:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{V_2}{V_1}$$

Luego tenemos la siguiente relación con respecto a la impedancia conectada z_l:

$$V_2 = -I_2 Z_L$$

Y las siguientes ecuaciones a partir de la descripción del cuadripolo por sus impedancias de vacío:

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 = Z_{11} * I_1 - \frac{Z_{12}}{Z_L} * V_2$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 = Z_{21} * I_1 - \frac{Z_{22}}{Z_L} * V_2$$

De donde obtenemos:

$$I_1 = (1 + \frac{Z_{22}}{Z_L})\frac{V_2}{Z_{21}}$$

Reemplazando, hallamos:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{Z_{21}Z_L}{Z_{11}Z_L + Z_{22}Z_{11} - Z_{12}Z_{21}}$$

(b) Para comenzar, tenemos que por ser el amplificador ideal, no ingresa corriente al mismo y copia el voltaje $e_- = e_+$:

$$V_1 = I_1 Ls$$

$$V_1 - V_2 = -I_2 R$$

Luego obtenemos:

$$V_1 = LsI_1 + 0I_2$$

$$V_2 = LsI_1 + RI_2$$

Donde las impedancias de vacío valen:

$$z_{11} = Ls \quad z_{12} = 0$$
$$z_{21} = Ls \quad z_{22} = R$$

(c) El problema planteado es similar al que estimamos en la parte a), ya que se trata de un cuadripolo cuyas impedancias de vacío conocemos, al que se le conecta una impedancia a la salida. En este caso $z_L = \frac{1}{Cs}$.

Luego tenemos:

$$H(s) = \frac{z_{21} * z_L}{z_{11} * z_L + z_{22} * z_{11} - z_{12} * z_{21}}$$

Reemplazando las impedancias por las halladas:

$$H(s) = \frac{Ls * \frac{1}{Cs}}{Ls * \frac{1}{Cs} + R * Ls}$$

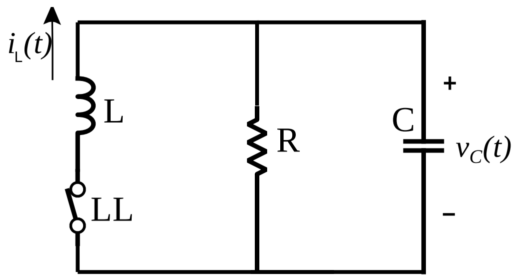
Finalmente:

$$H(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

(d) Al observar la transferencia del sistema, vemos que esta tiene un polo con parte real negativa, por lo que el sistema sí es BIBO estable.

Problema 3

(a) Para comenzar, pasemos el circuito al dominio de Laplace considerando las condiciones iniciales. Obtenemos un circuito con dos mallas, tal como aparece en la figura:



Luego podemos plantear hacer la impedancia equivalente entre R y C para tener un circuito de una malla sola, con el cual será más sencillo trabajar. Esto es:

$$Z_{eq} = R//C = \frac{R}{RCs + 1}$$

Hallamos I_L analizando la malla:

$$LI_o = I_L(Ls + \frac{R}{RCs + 1})$$

$$I_o = I_L(s + \frac{w_n^2}{s + w_n})$$
$$I_L = I_o \frac{s + w_n}{s^2 + sw_n + w_n^2}$$

Luego buscamos V_c, resolviendo la malla:

$$LI_o = V_c + I_L Ls$$
$$V_c = LI_o \frac{w_n^2}{s^2 + sw_n + w_n^2}$$

(b) Utilizamos la tabla de transformadas de Laplace (fórmula 16), con $\zeta = 0.5$ y obtenemos:

$$v_c(t) = \frac{w_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta w_n t} \sin(w_n \sqrt{1-\zeta^2} t)$$

Finalmente:

$$v_c(t) = \frac{2w_n}{\sqrt{3}} e^{-\frac{w_n t}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3} w_n}{2} t)$$

(c) En esta ocasión, al estar la llave abierta, sólo tenemos la malla R-C; estudiaremos entonces la descarga del capacitor en un circuito RC.

Para comenzar veamos el valor de $v_c(t*)$, que corresponderá al término del voltaje correspondiente a la condición inicial.

$$v_c(t*) = \frac{2w_n}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}$$

Consideremos ahora el circuito en Laplace. Tendremos al capacitor como una fuente cuyo valor será: $V_{c0} = \frac{v_c(t*)}{s}$ y una impedancia de valor $\frac{1}{Cs}$ cuyo voltaje llamaremos V_c (de sentido opuesto a V_{c0}). El voltaje total será la suma de ambos, lo llamaremos V_{ctot}.

Resolviendo la malla obtenemos:

$$\frac{\frac{V_{c0}}{s}}{R + \frac{1}{Cs}} = V_c Cs$$
$$V_c = \frac{V_{c0}}{s(RCs + 1)}$$

El voltaje en el condensador es la suma de los voltajes de la impedancia y de la condición inicial, que se encuentran en serie:

$$V_{ctot} = \frac{V_{c0}}{s} - \frac{V_{c0}}{s(RCs+1)} = \frac{V_{c0}}{s+\frac{1}{RC}}$$

(d) Utilizando el resultado obtenido, podemos antitransformar y obtener el voltaje en el tiempo para la descarga del capacitor (desde $t*$ en adelante):

$$V_{ctot}(t) = L^{-1}[\frac{V_{c0}}{s(RCs+1)}] = v_{c0}(t*)e^{-t/RC}$$

Uniendo las ecuaciones, tendremos en el bosquejo la carga del capacitor hasta $t*$ y luego la descarga a partir de $t*$ como se muestra en la figura 6.

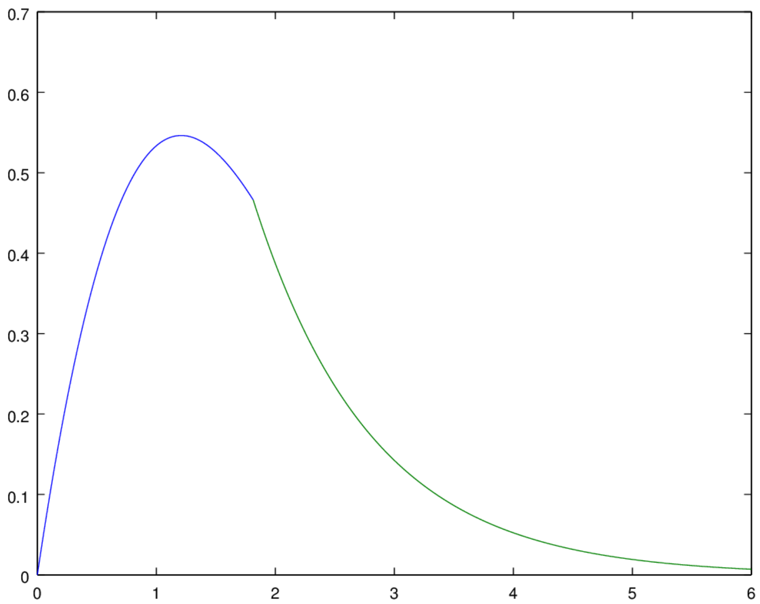


Figura 6