Matemática Discreta 1 - 2025

Respuestas al
Primer Parcial

Jueves 24 de abril de 2025

Apellido, Nombre	Firma	Cédula

Ejercicio 1. Se dispone de un tablero con 6 casilleros separados entre sí.

a. ¿De cuántas formas se pueden colocar en los casilleros: 3 fichas rojas, 4 fichas azules y 5 fichas negras? Se asumirán las siguientes reglas:

- Se permite colocar fichas de distintos colores en un mismo casillero.
- Se permite colocar más de una ficha de un mismo color en un mismo casillero.
- Se permite que uno o más casilleros queden vacíos.

b. Repetir la parte anterior, pero retirando la última regla. Es decir, no debe quedar ningún casillero vacío. *Sugerencia: aplicar el principio de inclusión-exclusión.*

Solución:

Parte a. Este problema consiste en distribuir fichas de diferentes colores en casilleros distintos. Debemos colocar 3 fichas rojas, 4 fichas azules y 5 fichas negras en 6 casilleros. Consideraremos cada color por separado, luego utilizaremos la regla del producto para obtener el número de distribuciones totales. Para cada color, debemos distribuir un número determinado de fichas idénticas en 6 casilleros distintos, permitiendo que algunos casilleros queden vacíos.

Utilizando el método de conteo de barras y puntos, obtenemos que el número de formas para distribuir n objetos idénticos en k casilleros es:

$$\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}.$$

Aplicando esta fórmula para cada color:

- Para las 3 fichas rojas en 6 casilleros: $\binom{3+6-1}{6-1} = \binom{8}{5} = 56$ formas posibles.
- Para las 4 fichas azules en 6 casilleros: $\binom{4+6-1}{6-1} = \binom{9}{5} = 126$ formas posibles.
- Para las 5 fichas negras en 6 casilleros: $\binom{5+6-1}{6-1} = \binom{10}{5} = 252$ formas posibles.

Como las decisiones de colocación para cada color son independientes entre sí, utilizamos la regla del producto:

$$56 \times 126 \times 252 = 1778112.$$

Por lo tanto, hay 1778112 formas distintas de colocar las fichas en los casilleros según las reglas dadas.

Parte b. Sea $A = 1778112$ el total de distribuciones obtenida en la parte anterior, y sea B_i el conjunto de distribuciones donde el casillero i-ésimo está vacío, para $i = 1, \ldots, 6$. Obsérvese que las distribuciones en un B_i dado sólo hablan del casillero i-ésimo, no de los demás (podrían o no estar vacíos). Utilizaremos el principio de inclusión-exclusión para calcular el número de distribuciones que no satisfacen *ninguna* de las condiciones B_i, que es lo que pide esta parte, porque no cumplir ninguna condición B_i implica que ningún casillero está vacío. Llamémosle a dicha cantidad S, siendo:

$$S = A - |B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5|.$$

Observar que $B_6 = \emptyset$ ya que al menos un casillero debe contener fichas.

Procedemos para cada caso de manera análoga a la parte a. pero agregando el factor correspondiente a la selección del (o los) casilleros vacíos:

- Al menos un casillero vacío: $\sum_i |B_i| = \binom{6}{1}\binom{7}{4}\binom{8}{4}\binom{9}{4} = 1852200$.
- Al menos dos casilleros vacíos: $\sum_{i,j} |B_i \cap B_j| = \binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{7}{3}\binom{8}{3} = 588000$.
- Al menos tres casilleros vacíos: $\sum_{i,j,k} |B_i \cap B_j \cap B_k| = \binom{6}{3}\binom{5}{2}\binom{6}{2}\binom{7}{2} = 63000$.
- Al menos cuatro casilleros vacíos: $\sum_{i,j,k,l} |B_i \cap B_j \cap B_k \cap B_l| = \binom{6}{4}\binom{4}{1}\binom{5}{1}\binom{6}{1} = 1800$.
- Al menos cinco casilleros vacíos: $\sum_{i,j,k,l,m} |B_i \cap B_j \cap B_k \cap B_l \cap B_m| = \binom{6}{5}1 = 6$.

Aplicando el principio de inclusión-exclusión, obtenemos:

$$S = 1778112 - (1852200 - 588000 + 63000 - 1800 + 6) = 452706.$$

Verificación numérica de cada parte en Julia:

```julia
using Combinatorics

# Generamos todas las posibles distribuciones usando multiexponents.
red_distributions = collect(multiexponents(6, 3))
blue_distributions = collect(multiexponents(6, 4))
black_distributions = collect(multiexponents(6, 5))

# Solucion de la parte (a).
total_combs = length(red_distributions) *
  length(blue_distributions) *
  length(black_distributions) # 1778112

# Solucion de la parte (b).
result = Vector{Vector{Int64}}()
for red in red_distributions
  for blue in blue_distributions
    for black in black_distributions
      current = red + blue + black
      if all(!iszero, current)
        push!(result, current)
      end
    end
  end
end
length(result) # 452706
```

Ejercicio 2. Demuestre las proposiciones siguientes utilizando el método de inducción matemática (o inducción completa):

a. Demostrar que $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$, $n \geq 0$.

b. Demostrar que $2^n < n!$ para todo natural $n \geq n_0$ y determinar n_0.

Para cada demostración:

- Establezca claramente el caso base.
- Formule correctamente la hipótesis inductiva.
- Justifique detalladamente el paso inductivo.
- Concluya explícitamente lo que se quería demostrar.

Las respuestas que omitan la justificación de cualquier paso podrán ser consideradas incompletas.

Solución:

(a) **Demostrar que $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$, $n \geq 0$.**

Caso base: Para $n = 0$.

$$\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$$
$$2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

Como $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^{0+1} - 1$, el caso base se cumple.

Hipótesis inductiva: Supongamos que para cierto $k \geq 0$ se cumple:

$$\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1$$

Paso inductivo: Debemos demostrar que se cumple para $n = k + 1$, es decir:

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{(k+1)+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$$

Trabajemos con el lado izquierdo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} 2^i &= \sum_{i=0}^{k} 2^i + 2^{k+1} \\
&= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(por hipótesis inductiva)} \\
&= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\
&= 2^{k+2} - 1
\end{aligned}$$

Conclusión: Por el principio de inducción matemática, queda demostrado que $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ para todo $n \geq 0$.

(b) **Demostrar que $2^n < n!$ para todo natural $n \geq n_0$ y determinar n_0.**

Primero debemos encontrar el valor de n_0, que es el menor número natural tal que $2^n < n!$ para todo $n \geq n_0$.

Verifiquemos algunos valores:

$$\begin{aligned}
n = 1: &\quad 2^1 = 2, \quad 1! = 1 \quad \Rightarrow \quad 2^1 > 1! \quad \text{(no se cumple)}\\
n = 2: &\quad 2^2 = 4, \quad 2! = 2 \quad \Rightarrow \quad 2^2 > 2! \quad \text{(no se cumple)}\\
n = 3: &\quad 2^3 = 8, \quad 3! = 6 \quad \Rightarrow \quad 2^3 > 3! \quad \text{(no se cumple)}\\
n = 4: &\quad 2^4 = 16, \quad 4! = 24 \quad \Rightarrow \quad 2^4 < 4! \quad \text{(se cumple)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $n_0 = 4$.

Caso base: Para $n = 4$.

$$2^4 = 16 \quad \text{y} \quad 4! = 24$$

Como $16 < 24$, se cumple que $2^4 < 4!$, verificando el caso base.

Hipótesis inductiva: Supongamos que para cierto $k \geq 4$ se cumple:

$$2^k < k!$$

Paso inductivo: Debemos demostrar que se cumple para $n = k + 1$, es decir:

$$2^{k+1} < (k+1)!$$

Partiendo del lado izquierdo:

$$\begin{aligned}
2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \\
&< 2 \cdot k! \quad \text{(por hipótesis inductiva)}
\end{aligned}$$

Como $k \geq 4$, sabemos que $2 < k + 1$, lo que implica:

$$\begin{aligned}
2 \cdot k! &< (k+1) \cdot k! \\
&= (k+1)!
\end{aligned}$$

Combinando estas desigualdades:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k < 2 \cdot k! < (k+1)!$$

Por lo tanto, $2^{k+1} < (k+1)!$.

Conclusión: Por el principio de inducción matemática, queda demostrado que $2^n < n!$ para todo número natural $n \geq 4$, y $n_0 = 4$ es el menor valor que cumple con esta propiedad.

Ejercicio 3. Se considera la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ tal que $f(k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$, $k \in \mathbb{N}$.

a. ¿Es f inyectiva? Justificar.

b. ¿Es f sobreyectiva? ¿Biyectiva? Justificar.

b. Conjeture una fórmula para $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ y demuéstrela.

Solución:

a. Veamos si la función es inyectiva, es decir, si para todos $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \neq n$ se cumple que $f(m) \neq f(n)$. Supongamos que $f(m) = f(n)$ para algunos $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \neq n$:

$$\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Multiplicando ambos lados por $m(m+1)n(n+1)$:

$$\begin{gathered} n(n+1) = m(m+1) \\ n^2 + n = m^2 + m \\ n^2 - m^2 = m - n \\ (n-m)(n+m) = -(n-m) \\ (n-m)(n+m+1) = 0 \end{gathered}$$

Como $n \neq m$ (por hipótesis), entonces $n + m + 1 = 0$. Pero esto es imposible ya que $n, m \in \mathbb{N}$, por lo que $n + m + 1 > 0$.

Por lo tanto, si $m \neq n$, entonces $f(m) \neq f(n)$, lo que demuestra que f es inyectiva.

b. Para que f sea sobreyectiva, cada elemento del codominio $\mathbb{Q}$ debe ser imagen de al menos un elemento del dominio $\mathbb{N}$.

Primero, demostremos que la función $f(k) = \frac{1}{k(k+1)}$ es estrictamente decreciente en $\mathbb{N}$. Para ello, debemos probar que $f(k) > f(k+1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Comparemos estos valores:

$$\begin{gathered} k < (k+2) \\ k(k+1) < (k+1)(k+2) \\ \frac{1}{(k+1)(k+2)} < \frac{1}{k(k+1)} \end{gathered}$$

Por lo tanto, $f(k) > f(k+1)$, y la función es estrictamente decreciente.

Como f es estrictamente decreciente, el valor máximo que toma es:

$$f(1) = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

Esto significa que cualquier número racional mayor que $\frac{1}{2}$ no está en la imagen de f. Por ejemplo, no existe ningún $k \in \mathbb{N}$ tal que $f(k) = 1$ o $f(k) = \frac{3}{4}$.

Por lo tanto, f no es sobreyectiva.

Como f es inyectiva pero no sobreyectiva, concluimos que f no es biyectiva.

c. Calculemos los primeros valores de la suma para buscar un patrón:

Para $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} f(k) = f(1) = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

Para $n = 2$:

$$\sum_{k=1}^{2} f(k) = f(1) + f(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Para $n = 3$:

$$\sum_{k=1}^{3} f(k) = f(1) + f(2) + f(3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Observando estos resultados, podemos conjeturar que:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{n}{n+1}$$

Vamos a demostrar esta conjetura por inducción matemática:

Caso base: Para $n = 1$, ya verificamos que:

$$\sum_{k=1}^{1} f(k) = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

Hipótesis inductiva: Supongamos que la fórmula es válida para algún $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{n}{n+1}$$

Paso inductivo: Debemos probar que la fórmula se cumple para $n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k) + f(n+1) = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Reescribiendo con denominador común:

$$= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

Que es exactamente lo que queríamos demostrar.

Por el principio de inducción matemática, queda demostrado que:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{n}{n+1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 4. Hagamos de cuenta que la terminal de ómnibus de Piriápolis tiene siete andenes numerados del 1 al 7. Cuatro empresas de transporte (COT, COPSA, TURISMAR y RUTAS DEL SOL) necesitan utilizar estos andenes para sus servicios. Se supondrá, a los efectos de simplificar el problema, que cada empresa puede utilizar uno o más andenes, pero cada andén solo puede ser asignado a una única empresa.

a. Si los siete andenes se asignan a las cuatro empresas de transporte de forma arbitraria, ¿de cuántas formas se puede realizar dicha asignación? Nota: por *forma arbitraria* entendemos que cada andén se asigna a una única empresa, pero una empresa puede recibir múltiples andenes.

b. En las condiciones de la parte anterior, considere el siguiente enunciado:

"Independientemente de cómo se realice la asignación, siempre existirá al menos una empresa que reciba dos o más andenes."

¿Es verdadero o falso? Justificar.

c. ¿De cuántas formas diferentes pueden asignarse los siete andenes a las cuatro empresas, de modo que cada empresa tenga al menos un andén asignado?

d. ¿De cuántas formas pueden asignarse los siete andenes a las cuatro empresas si COT debe recibir exactamente dos andenes y las demás empresas al menos uno?

Solución:

a. Este es un problema de asignación donde cada andén debe ser asignado a exactamente una de las cuatro empresas. Por lo tanto, estamos contando el número de funciones del conjunto de andenes

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

al conjunto de empresas

$$B = \{\text{COT}, \text{COPSA}, \text{TURISMAR}, \text{RUTAS DEL SOL}\}$$

.

Como cada andén puede asignarse de forma independiente a cualquiera de las 4 empresas, tenemos 4 opciones para cada andén. Por la regla del producto, el número total de posibles asignaciones es: $4^7 = 16384$.

b. El enunciado es verdadero y podemos demostrarlo utilizando el Principio del Palomar.

Por el Principio del Palomar, si tenemos n objetos para distribuir en k cajas y $n > k$, entonces al menos una caja debe contener más de un objeto.

En nuestro caso:

- Tenemos 7 andenes (objetos)
- 4 empresas (cajas)
- $7 > 4$

Por lo tanto, al distribuir 7 andenes entre 4 empresas, independientemente de cómo se realice la asignación, al menos una empresa debe recibir 2 o más andenes.

Podemos ser más precisos: si las 4 empresas recibieran como máximo 1 andén cada una, tendríamos a lo sumo 4 andenes asignados en total. Como tenemos 7 andenes, quedarían al menos 3 andenes sin asignar, lo cual contradice nuestra suposición de que todos los andenes son asignados.

c. Aquí necesitamos contar las funciones sobreyectivas del conjunto A al conjunto B. El número de funciones sobreyectivas de un conjunto de m elementos a un conjunto de n elementos se denota como $\mathrm{Sob}(m, n)$ y se calcula directamente mediante la fórmula:

$$\mathrm{Sob}(m, n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m.$$

Para nuestro caso, $m = 7$ y $n = 4$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sob}(7, 4) &= \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \binom{4}{4-k} (4-k)^7 \\
&= (-1)^0 \binom{4}{4} 4^7 + (-1)^1 \binom{4}{3} 3^7 + (-1)^2 \binom{4}{2} 2^7 + (-1)^3 \binom{4}{1} 1^7 + (-1)^4 \binom{4}{0} 0^7 \\
&= 1 \cdot 1 \cdot 16384 + (-1) \cdot 4 \cdot 2187 + 1 \cdot 6 \cdot 128 + (-1) \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0 \\
&= 16384 - 8748 + 768 - 4 + 0 \\
&= 8400.
\end{aligned}$$

Hay 8400 formas diferentes de asignar los siete andenes a las cuatro empresas, de modo que cada empresa tenga al menos un andén asignado.

d. Para esta parte, necesitamos contar las asignaciones donde:

- COT tiene exactamente 2 andenes
- Las otras 3 empresas tienen al menos 1 andén cada una

Primero, seleccionamos los 2 andenes para COT: $\binom{7}{2} = 21$ formas

Para los 5 andenes restantes, debemos asignarlos a las 3 empresas restantes (COPSA, TURISMAR y RUTAS DEL SOL), de forma que cada una reciba al menos un andén. Esto es equivalente a contar las funciones sobreyectivas de un conjunto de 5 elementos a un conjunto de 3 elementos, es decir, $\mathrm{Sob}(5, 3)$.

Calculemos $\mathrm{Sob}(5, 3)$ usando la misma fórmula:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sob}(5, 3) &= \sum_{k=0}^{3} (-1)^k \binom{3}{3-k} (3-k)^5 \\
&= (-1)^0 \binom{3}{3} 3^5 + (-1)^1 \binom{3}{2} 2^5 + (-1)^2 \binom{3}{1} 1^5 + (-1)^3 \binom{3}{0} 0^5 \\
&= 1 \cdot 1 \cdot 243 + (-1) \cdot 3 \cdot 32 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 0 \\
&= 243 - 96 + 3 + 0 \\
&= 150.
\end{aligned}$$

Ahora, para cada una de las 21 formas de seleccionar los andenes para COT, tenemos 150 formas de asignar los andenes restantes a las otras empresas. Por lo tanto, el número total de asignaciones es $21 \cdot 150 = 3150$.