

Primer Parcial

Jueves 24 de abril de 2025

Apellido, Nombre	Firma	Cédula

Ejercicio 1. Se dispone de un tablero con 6 casilleros separados entre sí.

- a. ¿De cuántas formas se pueden colocar en los casilleros: 3 fichas rojas, 4 fichas azules y 5 fichas negras? Se asumirán las siguientes reglas:
- Se permite colocar fichas de distintos colores en un mismo casillero.
 - Se permite colocar más de una ficha de un mismo color en un mismo casillero.
 - Se permite que uno o más casilleros queden vacíos.
- b. Repetir la parte anterior, pero retirando la última regla. Es decir, no debe quedar ningún casillero vacío. *Sugerencia: aplicar el principio de inclusión-exclusión.*

Ejercicio 2. Demuestre las proposiciones siguientes utilizando el método de inducción matemática (o inducción completa):

- a. Demostrar que $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$, $n \geq 0$.
- b. Demostrar que $2^n < n!$ para todo natural $n \geq n_0$ y determinar n_0 .

Para cada demostración:

- Establezca claramente el caso base.
- Formule correctamente la hipótesis inductiva.
- Justifique detalladamente el paso inductivo.
- Concluya explícitamente lo que se quería demostrar.

Las respuestas que omitan la justificación de cualquier paso podrán ser consideradas incompletas.

Ejercicio 3. Se considera la función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ tal que $f(k) = \frac{1}{k(k+1)}$, $k \in \mathbb{N}$.

- a. ¿Es f inyectiva? Justificar.
- b. ¿Es f sobreyectiva? ¿Biyectiva? Justificar.
- b. Conjeture una fórmula para $\sum_{k=1}^n f(k)$ y demuéstrela.

Ejercicio 4. Hagamos de cuenta que la terminal de ómnibus de Piriápolis tiene siete andenes numerados del 1 al 7. Cuatro empresas de transporte (COT, COPSA, TURISMAR y RUTAS DEL SOL) necesitan utilizar estos andenes para sus servicios. Se supondrá, a los efectos de simplificar el problema, que cada empresa puede utilizar uno o más andenes, pero cada andén solo puede ser asignado a una única empresa.

- a. Si los siete andenes se asignan a las cuatro empresas de transporte de forma arbitraria, ¿de cuántas formas se puede realizar dicha asignación? Nota: por *forma arbitraria* entendemos que cada andén se asigna a una única empresa, pero una empresa puede recibir múltiples andenes.
- b. En las condiciones de la parte anterior, considere el siguiente enunciado:
“Independientemente de cómo se realice la asignación, siempre existirá al menos una empresa que reciba dos o más andenes.”
¿Es verdadero o falso? Justificar.
- c. ¿De cuántas formas diferentes pueden asignarse los siete andenes a las cuatro empresas, de modo que cada empresa tenga al menos un andén asignado?
- d. ¿De cuántas formas pueden asignarse los siete andenes a las cuatro empresas si COT debe recibir exactamente dos andenes y las demás empresas al menos uno?