Matemática Discreta 1 - 2025

Respuestas al
Segundo Parcial

Jueves 29 de mayo de 2025

Apellido, Nombre	Firma	Cédula

Ejercicio 1. Encontrar la solución a_n a la ecuación en recurrencias:

$$a_n - 8a_{n-1} + 15a_{n-2} = 8n - 22, \qquad n \geq 3$$

que satisface las siguientes condiciones iniciales: $a_1 = 3$, $a_2 = 12$.

Solución:

Necesitamos resolver la ecuación en recurrencias no homogénea:

$$a_n - 8a_{n-1} + 15a_{n-2} = 8n - 22, \quad n \geq 3$$

Paso 1: Resolver la ecuación homogénea

La ecuación homogénea asociada es: $a_n - 8a_{n-1} + 15a_{n-2} = 0$

Su ecuación característica es:

$$r^2 - 8r + 15 = 0$$

Factorizando: $(r-3)(r-5) = 0$

Las raíces son: $r_1 = 3$ y $r_2 = 5$

Por tanto, la solución homogénea es:

$$a_n^{(h)} = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot 5^n$$

Paso 2: Encontrar una solución particular

Para el término no homogéneo $8n - 22$, probamos una solución particular de la forma:

$$a_n^{(p)} = An + B$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$(An + B) - 8(A(n-1) + B) + 15(A(n-2) + B) = 8n - 22$$

Expandiendo:

$$An + B - 8An + 8A - 8B + 15An - 30A + 15B = 8n - 22$$

Simplificando:

$$8An + (8B - 22A) = 8n - 22$$

Comparando coeficientes:

- Coeficiente de n: $8A = 8 \Rightarrow A = 1$
- Término constante: $8B - 22A = -22 \Rightarrow 8B - 22 = -22 \Rightarrow B = 0$

Por tanto: $a_n^{(p)} = n$

Paso 3: Solución general

La solución general es:

$$a_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot 5^n + n$$

Paso 4: Determinar las constantes

Usamos las condiciones iniciales $a_1 = 3$ y $a_2 = 12$:

Para $n = 1$: $3 = c_1 \cdot 3 + c_2 \cdot 5 + 1$

Para $n = 2$: $12 = c_1 \cdot 9 + c_2 \cdot 25 + 2$

Simplificando:

$$2 = 3c_1 + 5c_2 \quad (1) \tag{1}$$
$$10 = 9c_1 + 25c_2 \quad (2) \tag{2}$$

De la ecuación (1): $c_1 = \frac{2-5c_2}{3}$

Sustituyendo en (2):

$$10 = 9 \cdot \frac{2-5c_2}{3} + 25c_2$$
$$10 = 3(2 - 5c_2) + 25c_2$$
$$10 = 6 - 15c_2 + 25c_2$$
$$4 = 10c_2$$
$$c_2 = \frac{2}{5}$$

Entonces: $c_1 = \frac{2-5\cdot\frac{2}{5}}{3} = \frac{2-2}{3} = 0$

Solución final:

$$a_n = 0 \cdot 3^n + \frac{2}{5} \cdot 5^n + n = \frac{2 \cdot 5^n}{5} + n$$

$$\boxed{a_n = 2 \cdot 5^{n-1} + n}$$

Verificación:

- $a_1 = 2 \cdot 5^0 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
- $a_2 = 2 \cdot 5^1 + 2 = 2 \cdot 5 + 2 = 12$

Ejercicio 2. Una empresa de arquitectura debe construir edificios de apartamentos de n pisos. Para reducir costos, han decidido que cada piso puede tener exactamente 1, 2 o 3 apartamentos. Sea a_n el número de formas diferentes de diseñar un edificio de n pisos bajo estas restricciones.

a. Calcule a_1, a_2 y a_3 enumerando todas las posibilidades.

b. Establezca una relación de recurrencia para a_n (con $n \geq 4$) y justifique su respuesta.

c. Resuelva la relación de recurrencia obtenida para encontrar una fórmula cerrada para a_n.

d. Calcule a_5 usando tanto la relación de recurrencia como la fórmula cerrada, y verifique que ambos métodos dan el mismo resultado.

Solución:

Parte a: Cálculo de a_1, a_2 y a_3

- $a_1 = 3$: Un edificio de 1 piso puede tener 1, 2, o 3 apartamentos.
- $a_2 = 9$: Un edificio de 2 pisos. El primer piso puede tener 1, 2, o 3 apartamentos, y el segundo piso también puede tener 1, 2, o 3 apartamentos independientemente. Total: $3 \times 3 = 9$ formas.
- $a_3 = 27$: Similarmente, cada uno de los 3 pisos puede tener 1, 2, o 3 apartamentos independientemente. Total: $3 \times 3 \times 3 = 27$ formas.

Parte b: Relación de recurrencia

Para un edificio de n pisos ($n \geq 4$), podemos considerar cualquier diseño válido de un edificio de $(n-1)$ pisos y agregar un piso adicional en la parte superior.

El nuevo piso puede tener 1, 2, o 3 apartamentos (3 opciones), independientemente del diseño de los $(n-1)$ pisos anteriores.

Por tanto:

$$\boxed{a_n = 3 \cdot a_{n-1} \text{ para } n \geq 2}$$

Justificación: Cada diseño de $(n-1)$ pisos se puede extender de 3 formas diferentes agregando un piso con 1, 2, o 3 apartamentos.

Parte c: Fórmula cerrada

La relación de recurrencia $a_n = 3a_{n-1}$ con $a_1 = 3$ es una progresión geométrica con razón $r = 3$.

La solución es:

$$a_n = a_1 \cdot 3^{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

Por tanto: $\boxed{a_n = 3^n}$

Parte d: Verificación para a_5

Usando la relación de recurrencia:

$$a_4 = 3 \cdot a_3 = 3 \cdot 27 = 81 \tag{3}$$

$$a_5 = 3 \cdot a_4 = 3 \cdot 81 = 243 \tag{4}$$

Usando la fórmula cerrada:

$$a_5 = 3^5 = 243$$

Ambos métodos dan el mismo resultado: $\boxed{a_5 = 243}$

Ejercicio 3. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dé un ejemplo de una relación $\mathcal{R}$ sobre A que sea:

a. Reflexiva y simétrica, pero no transitiva.

b. Reflexiva y transitiva, pero no simétrica.

c. Simétrica y transitiva, pero no reflexiva.

d. Para cada uno de los casos anteriores, dibuje el digrafo (grafo dirigido) correspondiente a la relación.

Solución:

Parte a: Reflexiva y simétrica, pero no transitiva

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2)\}$$

Verificación:

- **Reflexiva:** Contiene (i,i) para todo $i \in A$
- **Simétrica:** Si $(a,b) \in \mathcal{R}$ entonces $(b,a) \in \mathcal{R}$
- **No transitiva:** $(1,2) \in \mathcal{R}$ y $(2,3) \in \mathcal{R}$ pero $(1,3) \notin \mathcal{R}$

Parte b: Reflexiva y transitiva, pero no simétrica

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (1,3), (2,3)\}$$

Verificación:

- **Reflexiva:** Contiene todos los pares (i,i)
- **Transitiva:** Si $(a,b), (b,c) \in \mathcal{R}$ entonces $(a,c) \in \mathcal{R}$
  - $(1,2), (2,3) \in \mathcal{R} \Rightarrow (1,3) \in \mathcal{R}$
- **No simétrica:** $(1,2) \in \mathcal{R}$ pero $(2,1) \notin \mathcal{R}$

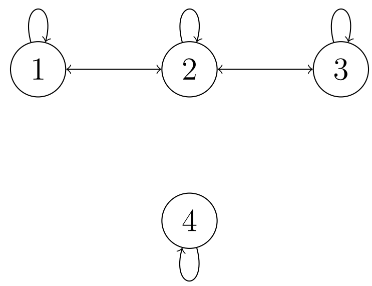
Parte c: Simétrica y transitiva, pero no reflexiva

$$\mathcal{R} = \{(1,2), (2,1), (3,4), (4,3)\}$$

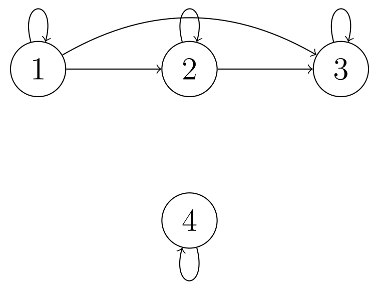
Verificación:

- **Simétrica:** Si $(a,b) \in \mathcal{R}$ entonces $(b,a) \in \mathcal{R}$
- **Transitiva:** No hay triples $(a,b), (b,c)$ con b común donde se pueda aplicar, así que se cumple vacuamente
- **No reflexiva:** $(1,1) \notin \mathcal{R}$

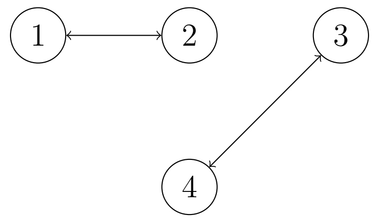
Parte d: Digrafos
Caso a: Reflexiva y simétrica, pero no transitiva



Caso b: Reflexiva y transitiva, pero no simétrica



Caso c: Simétrica y transitiva, pero no reflexiva



Ejercicio 4. Una empresa de desarrollo de videojuegos debe completar 8 tareas para lanzar su nuevo juego: $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8$. Debido a dependencias técnicas, estas tareas deben seguir ciertas restricciones de orden: T_1 debe completarse antes que T_3 y T_4; T_2 debe completarse antes que T_4 y T_5; T_3 debe completarse antes que T_6 y T_7; T_4 debe completarse antes que T_7; T_5 debe completarse antes que T_8; T_6 debe completarse antes que T_8.

a. Dibuje el diagrama de Hasse que representa esta relación de orden parcial.

b. Identifique todos los elementos minimales y maximales del orden parcial.

c. Proporcione un orden total que extienda este orden parcial (es decir, una secuencia válida para completar todas las tareas).

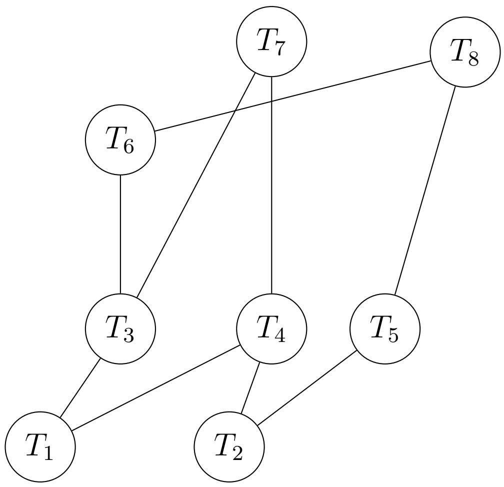
d. Determine si existen elementos a y b en el conjunto de tareas tales que no son comparables entre sí (es decir, ni $a \leq b$ ni $b \leq a$). Si existen, proporcione un ejemplo.

Solución:

Restricciones del orden parcial:

- $T_1 < T_3, T_4$
- $T_2 < T_4, T_5$
- $T_3 < T_6, T_7$
- $T_4 < T_7$
- $T_5 < T_8$
- $T_6 < T_8$

Parte a: Diagrama de Hasse



Parte b: Elementos minimales y maximales
Elementos minimales: T_1 y T_2

- No tienen predecessores en el orden parcial
- Son las tareas que pueden iniciarse inmediatamente

Elementos maximales: T_7 y T_8

- No tienen sucesores en el orden parcial
- Son las tareas finales del proyecto

Parte c: Orden total (extensión lineal)
Una secuencia válida: $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8$
Verificación:

- T_1 antes que T_3, T_4
- T_2 antes que T_4, T_5
- T_3 antes que T_6, T_7
- T_4 antes que T_7
- T_5 antes que T_8
- T_6 antes que T_8

Otra secuencia válida sería: $T_2, T_1, T_5, T_3, T_4, T_6, T_7, T_8$
Parte d: Elementos no comparables
Sí existen. Ejemplos de pares no comparables:

1. T_1 y T_2: Ambas son tareas iniciales, pueden ejecutarse en paralelo
2. T_3 y T_5: No hay relación de dependencia entre ellas
3. T_6 y T_7: Ambas dependen de T_3 pero son independientes entre sí
4. T_1 y T_5: No existe camino directo o indirecto entre ellas

Justificación para T_3 y T_5:

- No hay relación $T_3 \leq T_5$: T_3 no debe completarse antes que T_5
- No hay relación $T_5 \leq T_3$: T_5 no debe completarse antes que T_3
- Ambas pueden ejecutarse en paralelo una vez completadas sus dependencias respectivas (T_1 para T_3 y T_2 para T_5)

Este orden parcial permite cierta flexibilidad en la planificación del proyecto, ya que algunas tareas pueden ejecutarse en paralelo.