Matemática 1
Examen

CURE

11 Febrero de 2025

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deber utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.

Problema 1 [35 pts.]

Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y los parámetros a,$b \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-cos(\pi x)}{x-1} & \text{si} \quad x < -1 \\ (a+1)x - b & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ sen(\frac{\pi}{2}x) + x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

(a) [10 pts.] Determine para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$, f es continua. Fundamente detalladamente su resultado.

(b) [10 pts.] ¿Es f derivable en todo $\mathbb{R}$?. Fundamente su respuesta.

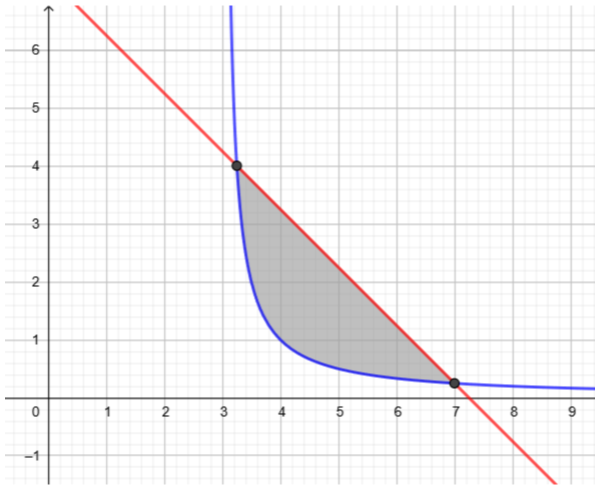
(c) [15 pts.] Estudie acotación de f en $\mathbb{R}$. Halle máximo y mínimo de f, $\forall\, x \in [2,4]$. Estos máximos y mínimos, ¿son locales o globales de f?. Fundamente su respuesta.

Problema 2 [22 pts.]

(a) [11 pts.] Sean las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : (3, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = -x + \frac{29}{4} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{x-3}$$

Hallar el área delimitada por las gráficas de f y g, que corresponde a la región gris en la imagen.



(b) [11 pts.] Dada la función $f : f(x) = e^x sen(x)$, hallar la primitiva de f cuyo gráfico pasa por el punto $(0, 0)$

Problema 3 [22 pts.]

(a) [10 pts.] Una empresa de bebidas quiere diseñar un nuevo envase, menos costoso, para sus latas de refresco, con los siguientes requisitos:

- Las latas tienen un volumen fijo de 500 cm^3.
- Las latas tienen estructura cilíndrica.
- El material de la pared de la lata cuesta 1 pesos por cm^2.
- El material del tope y la base de la lata cuesta 2 pesos por cm^2.

Hallar el radio de la base y la altura de la lata para que el costo del material sea mínimo.

(b) [12 pts.] Clasifique las siguientes series y en caso de convergencia calcule la suma:

1. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{4n^2-1}$$

2. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$$

Problema 4 [21 pts.]

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_0 = 1$ y $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}\ \forall n \geq 1$

(a) [10 pts.] Probar que $0 < a_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(b) [11 pts.] Estudiar monotonía y convergencia de (a_n). Fundamentar adecuadamente.

Solución

Problema 1

(a) Para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$, hay que analizar en cada intervalo si las funciones son continuas y luego en los puntos $x = -1$ y $x = 1$. Las funciones dentro de cada intervalo son continuas. Luego usando usando la definición de limite en un punto, en $x = -1$ se tiene que cumplir,

$$lim_{x\to -1^-} \frac{1 - cos(\pi x)}{x - 1} = lim_{x\to -1^+} (a + 1)x - b = f(-1) \tag{1}$$

para $x = 1$

$$lim_{x\to 1^-} (a + 1)x - b = lim_{x\to 1^+} sen(\frac{\pi x}{2}) + x^2 = f(1) \tag{2}$$

Para que se cumplan están condiciones, $a = 1/2$ y $b = -1/2$. Por lo tanto, $f(x) = \frac{3x}{2} + \frac{1}{2}$ si $-1 \leq x \leq 1$

(b) No, basta con observar que la función no es derivable en $x = -1$.

$$lim_{x\to -1^-} = \frac{\frac{1-cos(\pi x)}{x-1} - 1}{x + 1} \neq lim_{x\to -1^+} \frac{\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}}{x + 1} \tag{3}$$

(c) Para estudiar la acotación, se calcular:

$$lim_{x\to -\infty} \frac{1 - cos(\pi x)}{x - 1} = 0 \tag{4}$$

y además sabiendo que la función es continua, $f(-1) = -1$. Por lo tanto el mínimo global de la $f(x)$, es -1 y se da en $x = -1$. Luego en los restantes intervalos las funciones son crecientes, entonces solo resta calcular el limite:

$$lim_{x\to +\infty} sen(\frac{\pi x}{2}) + x^2 = +\infty \tag{5}$$

por lo tanto máximo global no hay.
En el intervalo $[-1, \infty]$, $f(x)$ es creciente, por lo tanto el máximo de $f(x) \in [2, 4]$ es $f(4)$ y el mínimo es $f(2)$. Ambos son máximos y mínimos locales del segmento $[2, 4]$.

Problema 2

(a) Primero hay que saber los puntos que definen la región, para esto:

$$f(x) - g(x) = -x + \frac{29}{4} - \frac{1}{x - 3} = 0$$

operando la expresión anterior, se obtiene

$$-4x^2 + 41x - 91 = 0$$

por lo tanto $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en $x = \frac{13}{4} = 3.25$ y $x = 7$
Por lo tanto la región sombreado es:

$$\int_{3.25}^{7} f(x) - g(x)\ dx = \frac{-x^2}{2} + \frac{29x}{4} - L|x-3|\ |_{3.25}^{7} = 5.22$$

(b) Las primitivas de $f(x)$ son:

$$F(x) = \int f(x)dx = \int e^x sen(x)dx \overset{(1)}{=} \frac{e^x}{2}(sen(x) - cos(x)) + k$$

(1) aplicando partes($\int f^{'}(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g^{'}(x)dx$). Para que se cumpla la condición $F(x=0) = 0$, debe ser $k = \frac{1}{2}$, por lo tanto la primitiva es

$$F(x) = \frac{e^x}{2}(sen(x) - cos(x)) + \frac{1}{2}$$

Problema 3

(a) Hay que buscar la función de costo, ya que es esto lo que se quiere minimizar.

- área cara curva: $(2\pi rh) * \$1$
- área ambas tapas: $2(\pi r^2) * \$2$

por lo tanto la función costo es: (1) $costo(r,h) = 4\pi r^2 + 2\pi rh$.
Ademas se sabe que volumen de la lata es: (2) $V(r,h) = \pi r^2 h$, donde r es el radio de la base y h la altura de la lata.
Sustituyendo (2) en (1) se obtiene: $costo(r) = 4\pi r^2 + \frac{1000}{r}$ Se deriva, se iguala a 0 y se estudia el signo y se observa que $costo(r)$ tiene un mínimo en $r = 7,3\ cm$.
Por la ecuación (2) se sabe que la relación entre h y r es: $h = \frac{500}{\pi r^2}\ cm$

(b)

1- $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2}{4n^2 - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$ La mayoría de los términos se cancelan, lo que queda es $1 - lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 1$.

2- $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n + 2^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{2})^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{3})^n$. Ambas son series geométricas que cumplen $|r| < 1$ por lo tanto la suma es: $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n + 2^n}{6^n} = \frac{3}{2}$

Problema 4

(a) Por inducción completa Paso base. $a_0 = 1 \Longrightarrow 0 < a_0 < 2$
Paso Inductivo. (HI) $0 < a_n < 2$ (TI) $0 < a_{n+1} < 2$
Demostr.) Por HI $0 < a_n < 2\ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow 0 + 2 < a_n + 2 < 2 + 2\ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow 2 < a_n + 2 < 4\ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \sqrt{2} < \sqrt{a_n + 2} < \sqrt{4}\ \forall n \in \mathbb{N} \underset{0<\sqrt{2}}{\Longrightarrow} 0 < a_n + 2 < 2\ \forall n \in \mathbb{N}$

(b) Algunos términos: $a_0 = 1 \quad a_1 = \sqrt{3} \quad a_2 = sqrt\sqrt{3} + 2$ observando los primeros términos parece ser una sucesión creciente.
Demostración)
$a_{n+1} > a_n \iff \sqrt{a_n + 2} > a_n \underset{a_n>0}{\iff} a_n + 2 < a_n^2 \iff 0 > a_n^2 - a_n - 2 \iff 0 > (a_n - 2)(a_n + 1)$
Como por parte (a) $0 < a_n < 2\ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow (a_n - 2)(a_n + 1) < 0\ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow (a_n) \uparrow$