Modelos de optimización para aplicaciones forestales

Clase - Programación Multiobjetivo

CENUR Noreste y Facultad de Ingeniería. UdelaR

2025

Contenido

Objetivos de la clase

- Comprender los conceptos fundamentales de optimización multi-objetivo aplicados a recursos forestales.
- Distinguir y aplicar el **punto ideal**, frente de Pareto y métodos a priori y a posteriori.
- Modelar y resolver problemas multi-objetivo propios de la industria forestal mediante ejemplos prácticos.

.

- Curso “Introducción a la Optimización Evolutiva Multiobjetivo”, Dr. Carlos Coello Coello. CINVESTAV, México. https://delta.cs.cinvestav.mx/~ccoello/cursoemoo/
- Curso “Conceptos y herramientas para la resolución de problemas de optimización multiobjetivo”. Dr. Diego Rossit, Dr. Sergio Nesmachnow. UDELAR, Uruguay. https://eva.fing.edu.uy/course/view.php?id=1687.

Motivación

- En el mundo real, la mayor parte de los problemas tienen varios objetivos (posiblemente en conflicto entre si) que se desea sean satisfechos de manera simultánea.
- No existe una solución única que optimice simultáneamente todos los objetivos considerados en el problema.
- Las múltiples soluciones óptimas establecen diferentes niveles de compromiso (*trade-off*) entre los objetivos considerados.
- Debe aplicarse algún criterio o proceso para seleccionar soluciones para implementar en la práctica (proceso de toma de decisiones)

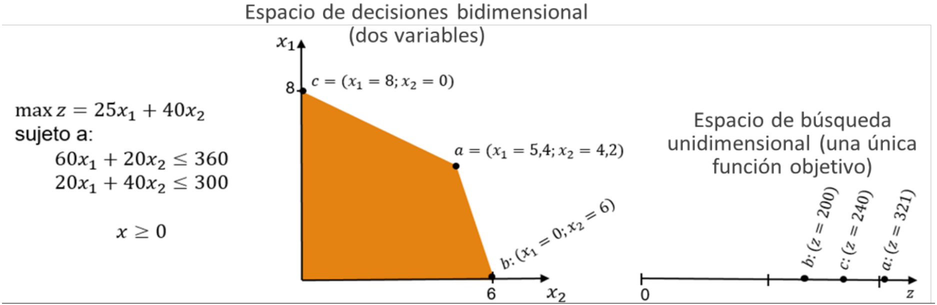
- Multiple-criteria decision-making (MCDM) or multiple-criteria decision analysis (MCDA). Disciplina que apunta a apoyar la toma de decisiones en contexgtos en los que hay múltiples criterios en conflicto.
- Problema de Optimización Multiobjetivo (POM) puede definirse como el problema de encontrar [Osyczka, 1984]:
  - un vector de variables de decisión que satisfagan un cierto conjunto de restricciones y optimice un conjunto de funciones objetivo.
  - Estas funciones forman una descripción matemática de los criterios de desempeño que suelen estar en conflicto unos con otros y que se suelen medir en unidades diferentes.
  - El término “optimizar” en este caso toma pues un significado diferente al del caso de problemas mono-objetivo.

Andrzej Osyczka, Multicriterion Optimization in Engineering with FORTRAN programs, Ellis Horwood Limited, UK, 1984.

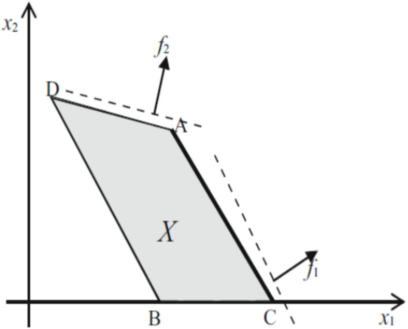
Cosecha forestal

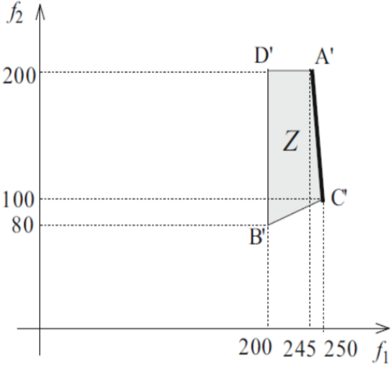
- Objetivos posibles:
  - maximizar el beneficio a largo plazo, maximizar la sostenibilidad,
  - maximizar la captura de carbono, minimizar la mano de obra necesaria,
  - minimizar el impacto ambiental, etc.
- Contraposicion de objetivos, vs objetivos alineados.
- Discusión de espacio de decisión (el de las variables de decisión) vs. espacio de objetivos (el de los valores de las funciones objetivo).

- En el espacio de decisiones se representan las variables del problema
- En el espacio de búsqueda se representan los objetivos del problema



- Al optimizar una única función objetivo, la región factible en el espacio de decisiones $x \in X$ se asigna a un espacio unidimensional en $\mathbb{R}$.
- En el caso multiobjetivo, el espacio de decisiones se asigna a un espacio multidimensional de objetivos $Z = \{z = f(x) \in \mathbb{R}^M : x \in X\}$; siendo M el número de dimensiones (funciones objetivo).





Un ejemplo: comprar un automóvil

- Opciones:
  - automóvil 1, con un costo 10.000 USD y prestaciones muy básicas (solución 1)
  - automóvil 2, con un costo de 100.000 USD y prestaciones de lujo (solución 2).
- Si el costo es el único objetivo, el óptimo es la solución 1. En la calle habría todos autos baratos ...
- Si el confort es el único objetivo, el óptimo es la solución 2. En la calle habría todos autos caros...

Un ejemplo: comprar un automóvil (cont.)

- También existen opciones (soluciones) intermedias (A, B y C) con diferentes valores de costo y confort.
- Entre dos soluciones, una es mejor en términos de un objetivo, pero es peor en el valor del otro objetivo.

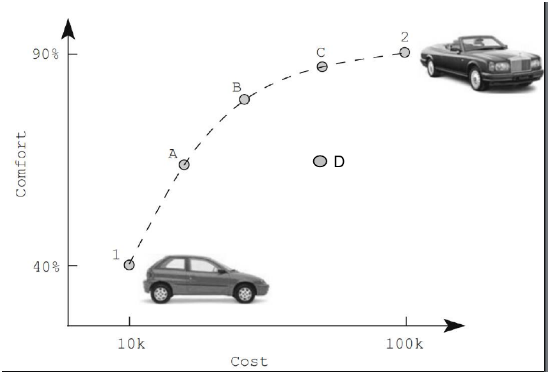


Figura: A nadie le interesaría la solución D, pudiendo optar por la solución A (mismo confort a menor costo) o por la solución C (mejor confort al mismo costo).

- Determinar un vector de variables de decisión que satisfagan un cierto conjunto de restricciones y optimice un conjunto de funciones objetivo.
- Las funciones constituyen una descripción matemática de los criterios de desempeño, que suelen estar en conflicto unos con otros y que en general se miden en unidades diferentes.
- El proceso de optimizar tiene un significado diferente al del caso de problemas mono-objetivo.
- Las soluciones establecen diferentes niveles de compromiso (*trade-off*) entre los objetivos considerados.

Problema de optimización multiobjetivo (cont.)

- Se distinguen tres tipos de situaciones que pueden presentarse en un problema multiobjetivo:
  - Minimizar todas las funciones objetivo.
  - Maximizar todas las funciones objetivo.
  - Minimizar algunas funciones y maximizar otras
- Por simplicidad, todas las funciones se convierten a un problema de maximización o a uno de minimización.
- Por ejemplo, para convertir todas las funciones a maximizar para que correspondan a un problema de minimización

$$\text{máx} f_i(x) = \text{mín}(-^{f}_{i}(x)) \tag{1}$$

Problema de optimización multiobjetivo (cont.)

Las principales características de un MOP son:

- trabajan sobre un espacio multidimensional de funciones.
- no existe una única solución al problema.
- es necesario un proceso de toma de decisiones en cual se decide qué tipo de compromisos son más convenientes desde la perspectiva del tomador de decisiones.
- Este proceso puede realizarse a priori o a posteriori.
- La noción de óptimo se modifica, ya que no es posible encontrar una solución única que sea óptima para todas las funciones a optimizar.

Definición formal

Encontrar el vector $\overrightarrow{X} = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ que satisfaga las m restricciones de desigualdad:

$$g_i(\overrightarrow{X}) \leqslant 0, i = 1, 2, ..., m \tag{2}$$

las p restricciones de igualdad

$$h_i(\overrightarrow{X}) = 0, i = 1, 2, ..., p \tag{3}$$

y optimice la función vectorial

$$f(\overrightarrow{X}) = [f_1(\overrightarrow{X}), f_2(\overrightarrow{X}), ..., f_k(\overrightarrow{X})] \tag{4}$$

Sea un problema multi-objetivo con funciones objetivo $f_i()$, $i = 1, \ldots, M$.

- Una solución x **domina** a una solución y, si $f_i(x)$ “es mejor o igual que” $f_i(y) \forall i$, y existe al menos un j tal que $f_j(x)$ “es estrictamente mejor que” ‘$f_j(y)$.

La noción de óptimo se modifica, ya que no es posible encontrar una solución única que sea óptima para todas las funciones a optimizar.

- Una solución x^* es un **óptimo de Pareto** si no existe ningún vector factible que decremente (incremente) algún criterio sin causar un incremento (decremento) simultáneo en al menos otro criterio.
- $\forall x \in \Omega \longrightarrow \forall i \in 1, ..., M, f_i(x) = f_j(x^*)$ y $f_i(x) > (<) f_j(x^*)$ para al menos un i

Dominancia de Pareto

Los vectores correspondientes a las soluciones no incluidas en el conjunto de óptimos de Pareto son llamados soluciones no dominadas. La dominancia de Pareto es una relación de orden parcial entre las soluciones factibles $(v, w \in \Omega)$.

$w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ domina a $w = (v_1, v_2, ..., v_n)$ si:
$w_i \leqslant (\geqslant) v_i \; \forall i = 1, ..., n$ y $\exists j / w_i < (>) v_i$

Concepto de dominancia

- En un problema de optimización monoobjetivo, la superioridad de una solución sobre otra se determina fácilmente comparando los valores de función objetivo.
- En un problema de optimización multiobjetivo, la calidad de una solución está determinada por la dominancia.
- Una solución x1 domina a otra solución x2 si ambas condiciones 1 y 2 son verdaderas:
  1. La solución x_1 no es peor que x_2 en todos los objetivos.
  2. La solución x_1 es estrictamente mejor que x_2 en al menos uno de los objetivos.

Concepto de dominancia (cont.)

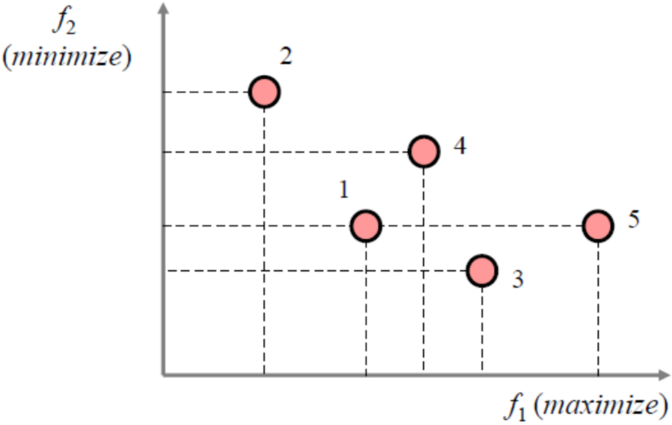


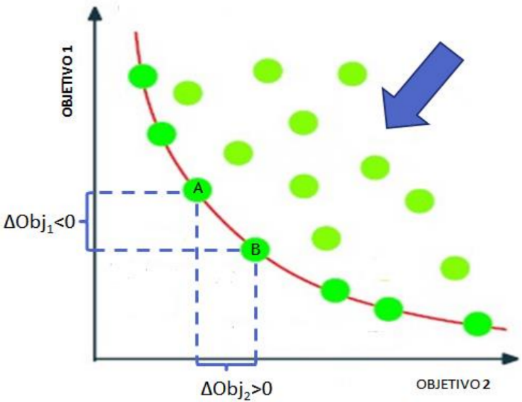
Figura: 1 domina a 2 (mejor valor de f_1 y de f_2). 5 domina a 1 (mejor valor de f_1 e igual valor de f_2). 1 vs 4: ninguna solución domina a la otra (1 tiene mejor valor de f_2 y 4 tiene mejor valor de f_1), son soluciones no dominadas entre si.

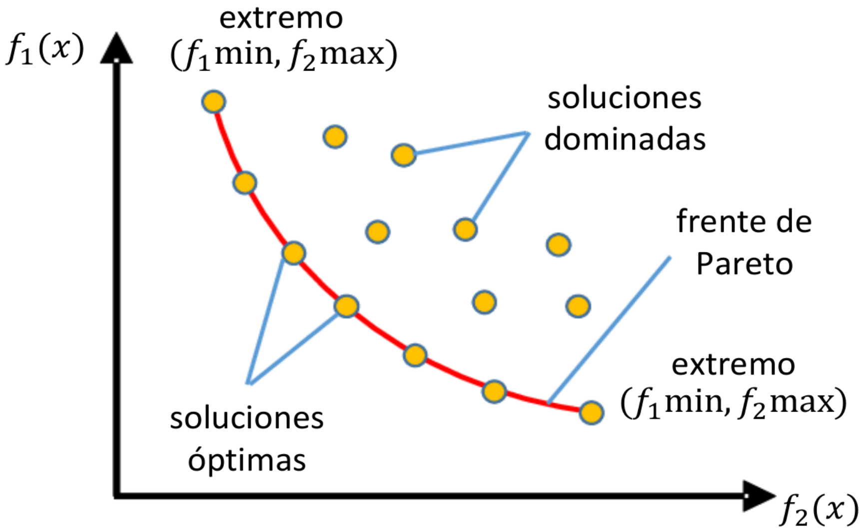
Optimo de Pareto

- Conjunto eficiente o conjunto de Pareto: conjunto de soluciones factibles no dominadas de un problema multi-objetivo.
- Frente de Pareto(o frontera de Pareto): valores funcionales de las soluciones no dominadas.

Optimalidad de Pareto

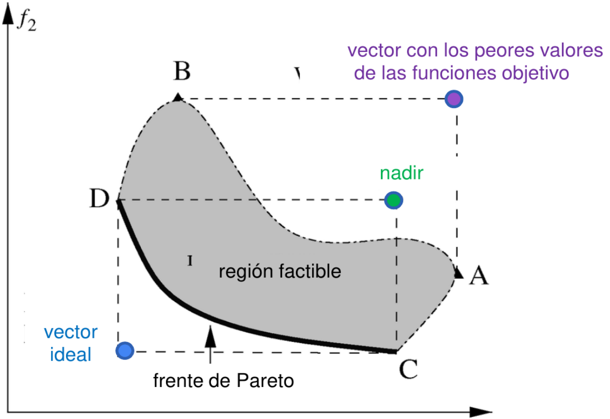
- El conjunto no dominado de toda la región factible de un problema es el frente de Pareto.
- Una solución es óptimo de Pareto si no existe otra solución que proporcione una mejora en una función objetivo sin producir un empeoramiento en otra función objetivo.




extremo
$(f_1 \min, f_2 \max)$
$f_1(x)$
soluciones
dominadas
frente de
Pareto
extremo
$(f_1 \min, f_2 \max)$
soluciones
óptimas
$f_2(x)$

Soluciones especiales: ideal, nadir (anti-ideal)

- **Punto ideal**: punto (y_1, y_2) en el espacio de objetivos cuyas coordenadas corresponden al valor óptimo por separado de ambas funciones objetivo.
- **Punto anti-ideal**: punto (y_1, y_2) en el espacio de objetivos cuyas coordenadas corresponden a los peores valores funcionales de las soluciones del frente de Pareto.



El punto ideal es generalmente no factible (no pertenece al conjunto de Pareto), mientras que el punto anti-ideal marca los límites de degradación aceptable en el frente.

Ejemplo

Un ingeniero forestal debe decidir la superficie a cosechar de 4 rodales en un período (H = 1 año). Su objetivo es maximizar la producción total de madera y, simultáneamente, minimizar la pérdida de suelo como resultado de la operación.

Rodal	**Superficie (ha)**	**Volumen por ha (m^3/ha)**
1	4.8	112.1
2	12.3	112.1
3	8.7	327.5
4	5.1	0.4

La pérdida de suelo generada depende de la proporción de superficie cosechada respecto al total, según la fórmula:
Perdida de suelo = $0.02 \times \%$(superficie total cosechada respecto al total)

Variables de Decisión:

$$x_i\text{, superficie a cosechar del rodal } i \ (i = 1, 2, 3y4)$$

Funciones Objetivo:

Maximizar la producción de madera total:

$$f_1(x) = 112{,}1x_1 + 112{,}1x_2 + 327{,}5x_3 + 0{,}4x_4$$

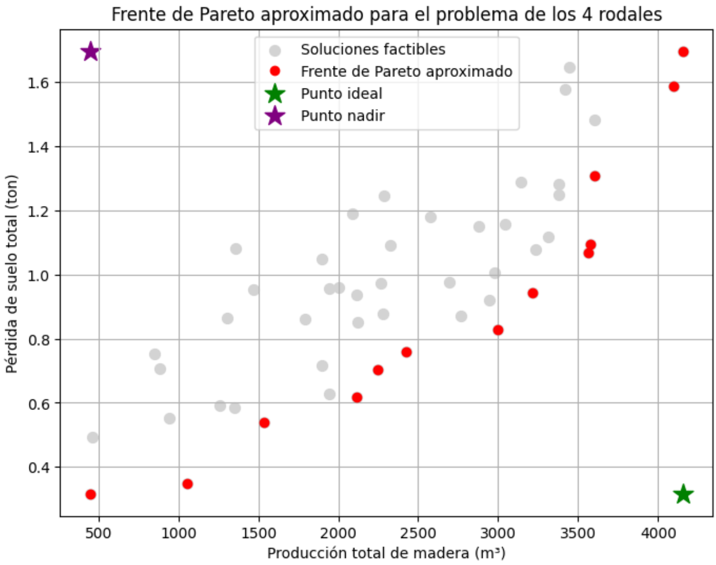
Minimizar la pérdida de suelo total:

$$f_2(x) = 0{,}02 \times 100(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{S_T})$$

donde S_T es la suma de las superficies de los rodales.
Restricciones:

$$0 \leqslant x_i \leqslant \text{superficie de cada rodal } i \ (i = 1, 2, 3y4)$$

Frente de Paretos y puntos ideal y anti-ideal



Métodos exactos

- A posteriori : Método de sumas ponderadas.
- A posteriori: Método ε-constraint.
- A priori: Ordenamiento lexicográfico.
- A priori: Programación por metas (goal programming).

Métodos de sumas ponderadas

- Transformar problema multiobjetivo de minimizar $f_1(x)$ y $f_2(x)$, en problema de minimizar $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$, para diferentes ponderaciones (α_1, α_2), manteniendo las restricciones.
- Usualmente $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.
- Distintos valores de las ponderaciones permiten encontrar distintas soluciones.
- Es conveniente normalizar las funciones objetivo.
- **Ventajas**: fácil de usar, rápido, no requiere cambiar restricciones, puede ser fácil interpretar las preferencias de usuario.
- **Limitaciones**:
  - distribución uniforme de las ponderaciones no garantiza distribución uniforme de las soluciones en el frente de Pareto.
  - Distintas ponderaciones pueden dar lugar a soluciones iguales.
  - En problemas no lineales, puede haber soluciones de Pareto que no se pueden encontrar por este método.

Método ε-constraint.

- Transformar problema multiobjetivo de minimizar $f_1(x)$ y $f_2(x)$, en problema de minimizar $f_1(x)$, agregando como restricción que $f_2(x) \leq \epsilon_2$, para diferentes valores (ϵ_2), manteniendo las otras restricciones.
- Usualmente ϵ_2 toma valores equidistribuidos entre los valores de f_2 evaluados en el punto ideal y el anti-ideal.
- Distintos valores de las ponderaciones permiten encontrar distintas soluciones.
- Es conveniente normalizar las funciones objetivo.
- **Ventajas**: fácil de usar, no requiere normalizar las funciones objetivo, permite encontrar soluciones no encontradas con sumas ponderadas.
- **Limitaciones**:
  - distribución uniforme de las restricciones no garantiza distribución uniforme de las soluciones en el frente de Pareto.
  - Distintas restricciones pueden dar lugar a soluciones iguales, incluso puede dar soluciones dominadas.

Optimización lexicográfica

- Corresponde a dar un orden de preferencia de las funciones objetivo, por ejemplo si f_1 es preferida frente a f_2, luego se optimiza en ese orden, agregando como restricciones los valores óptimos obtenidos en las etapas previas.
- Encuentra siempre un punto único dentro del frente de Pareto. Implica dar preferencia absoluta a una de las funciones

Programación por objetivos (Goal Programming)

- Define para cada función objetivo una meta m_i, y variables de decisión auxiliares correspondientes a los desvíos.
- Se minimizan los desvíos (positivos y negativos), ponderados por su importancia.
- **Ventajas**: fácil de usar, permite encontrar una solución única que representa la importancia asignada a cada función objetivo.
- **Limitaciones**: requiere normalización de funciones objetivo, requiere conocimiento del problema y las soluciones de cada componente independiente para proponer las metas.

Ejemplo de *Buongiorno, J., & Gilless, J. K. (2003). Decision methods for forest resource management. Elsevier.*
Una planta de pulpa de papel quiere:

- Mantener al menos 300 trabajadores empleados
- Generar 40000 dólares de ingresos diarios
- Mantener baja la contaminación (un máximo de 400 unidades de BOD, un indicador de contaminación)
- Esta situación presenta múltiples objetivos en conflicto: por ejemplo, aumentar la producción puede aumentar el empleo, pero también la contaminación.

Modelo tradicional (no por metas):

- Con programación lineal clásica se tendría que elegir uno de los objetivos como función a optimizar (por ejemplo, minimizar la contaminación), y los otros como restricciones (por ejemplo, empleo $\geqslant 300$, ingresos $\geqslant 40000$). Pero esto obliga a priorizar un objetivo y tratar los otros simplemente como límites.

Modelo tradicional vs. GP (cont.)

Enfoque de programación por metas:

1. Introducción de variables de desviación Para cada meta, se introducen dos variables:
    - La desviación por debajo de la meta (cuánto faltó para llegar)
    - La desviación por encima de la meta (cuánto se excedió)
      Ejemplo:
      $X_1 + X_2 + L^- - L^+ = 300$
      L^- los que falta para lograr los 300 empleos
      L^+ los que se excede por arriba de lo 300 empleos
2. Igual para ingresos y contaminación:
   $100X_1 + 200X_2 + R^- - R^+ = 40000$
   $X_1 + 1{,}5X_2 + P^- - P^+ = 400$

El objetivo es minimizar una combinación ponderada de todas las desviaciones (normalmente solo las que representan “no alcanzar la meta” o “excesos indeseados”). Así, la función objetivo sería algo así como:

$$\min wL^- + w_2R^- + w_3P^+$$

Donde w_i son “pesos”‘ que indican cuán importante es para la dirección acercarse a cada meta.

¿Cómo se interpreta la solución?

- Todas las metas se tratan simultáneamente.
- Si no se pueden satisfacer todas, el modelo busca la manera de acercarse lo más posible a todas ellas, según la importancia relativa (los “pesos”) asignada a cada meta.
- Si hay que sacrificar una meta para lograr otra (por ejemplo, menos ingresos para tener menos contaminación), se puede experimentar cambiando pesos y metas para ver los distintos compromisos (“trade-offs”).

- Olalla Díaz-Yáñez, Timo Pukkala, Petteri Packalen, Manfred J Lexer, Heli Peltola, Multi-objective forestry increases the production of ecosystem services, Forestry: An International Journal of Forest Research, Volume 94, Issue 3, July 2021, Pages 386–394, `https://doi.org/10.1093/forestry/cpaa041`.
- Abbas Nabhani, Elham Mardaneh, Hanne K. Sjølie, Multi-objective optimization of forest ecosystem services under uncertainty, Ecological Modelling, Volume 494, 2024, 110777, `https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2024.110777`.

Algunos papers en la literatura reciente

- Adriana Bussoni, Frederick Cubbage, Jorge Alvarez Giambruno, Silvopastoral systems and multi-criteria optimization for compatible economic and environmental outcomes, Agricultural Systems, Volume 190, 2021, 103118, `https://doi.org/10.1016/j.agsy.2021.103118`.
- Eyvindson K, Burgas D, Antón-Fernández C et al. MultiOptForest: An interactive multi-objective optimization tool for forest planning and scenario analysis. Open Res Europe 2024, 3:103 `https://doi.org/10.12688/openreseurope.15812.2`