Modelos de optimización para aplicaciones forestales

Clase 3 - Modelos de Programación Entera y Entera Mixta

Contenido

- Parte 1:
  - Definición y características de los modelos de Programación Entera (IP) y Programación Lineal Entera Mixta (MILP).
  - Fundamentos del Método Branch-and-Bound.
- Parte 2:
  - Ejemplos de problemas clásicos de modelos MILP.
- Parte 3:
  - Ejemplos de modelos MILP aplicados a problemas forestales.

Parte 1

Programación Lineal Entera Mixta (MILP)

- Extensión de los modelos LP, donde **al menos una de las variables debe tomar valores enteros.**
- Cuando se exige que todas las variables tomen valores enteros, se denominan problemas de **Programación Entera (IP)**.
- Un caso particular es el caso de **variables binarias**, es decir, cuando toman valores en el conjunto {0,1}.
- **Los modelos MILP son en general más difíciles de resolver que los de LP** (por la pérdida de convexidad).
- Algunos problemas con variables enteras y estructuras particulares, se pueden resolver de forma eficiente.

MILP: Ejemplos de aplicación

- Planificación de la producción
- Transporte y distribución de bienes
- Localización de centros de distribución o fabricación
- Secuenciamento de tareas (scheduling)
- Problemas de cubrimiento
- Ruteo de vehículos
- Problemas de corte y empaquetamiento
- …

MILP: sobre las soluciones

TotalDiasProduccion = 1675.86

Diasdeproduccion [*,*]

:	1	2	3	4	5	6	7
1	12	0	0	4.2324	7.7676	4	8
2	9	9	0	3	3	0	15
3	9	3	6	0	3	9	9
4	13.6585	0	0	6.82927	6.82927	6.82927	6.82927
5	0	20.4878	6.82927	0	6.82927	0	34.1463
6	6.82927	20.4878	0	0	13.6585	0	34.1463
7	0	0	0	0	35.2	0	12
8	0	0	0	14	0	0	0
9	0	0	0	0	0	10	0
10	0	10	0	0	0	12	0
11	0	10	0	0	0	12	0
12	0	0	10	0	0	0	0
13	8.57143	25.7143	8.57143	8.57143	25.7143	25.7143	25.7143
14	8.57143	42.8571	8.57143	8.57143	8.57143	42.8571	0
15	0	0	35	0	0	25	0
16	15	15	5	5	5	20	0
17	3.5	3	0	4.5	0	0	8
18	6.5	0	4	2	0	3	0
19	0	0	3	0	2	4	5

Variables Continuas

Variables Enteras

TotalDiasProduccion = 1681

Diasdeproduccion [*,*]

:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	12	2	1	1	12	1	0	11	4	0	3	1
2	11	1	9	1	2	0	15	7	1	1	9	9
3	12	0	9	3	0	0	15	1	0	8	9	9
4	5	13	15	0	7	6	14	20	35	0	14	22
5	7	0	0	20	0	8	0	7	52	0	14	43
6	29	0	10	5	16	0	29	0	0	43	0	19
7	0	47	0	0	0	17	0	0	0	42	0	0
8	0	0	0	12	0	0	0	26	0	0	12	0
9	0	0	0	0	0	10	0	0	10	0	0	10
10	10	0	0	0	12	0	0	0	12	0	0	0
11	0	10	0	0	0	0	12	0	0	0	12	0
12	0	10	0	0	0	0	12	0	0	0	12	0
13	17	9	0	52	0	31	2	17	25	27	0	26
14	25	0	2	35	41	0	24	27	2	0	24	26
15	15	0	2	13	18	12	5	25	0	0	15	15
16	10	0	35	0	0	20	0	25	0	0	15	15
17	8	0	3	0	0	2	7	0	6	0	7	3
18	8	0	3	0	3	2	3	0	7	0	5	5
19	4	2	4	0	3	0	5	0	7	0	11	0

MILP: sobre las soluciones

TotalDiasProduccion = 1675.86

Diasdeproduccion [*,*]

:	1	2	3	4	5	6	7
1	12	0	0	4.2324	7.7676	4	8
2	9	9	0	3	3	0	15
3	9	3	6	0	3	9	9
4	13.6585	0	0	6.82927	6.82927	6.82927	6.82927
5	0	20.4878	6.82927	0	6.82927	0	34.1463
6	6.82927	20.4878	0	0	13.6585	0	34.1463
7	0	0	0	0	35.2	0	12
8	0	0	0	14	0	0	0
9	0	0	0	0	0	10	0
10	0	10	0	0	0	12	0
11	0	10	0	0	0	12	0
12	0	0	10	0	0	0	0
13	8.57143	25.7143	8.57143	8.57143	25.7143	25.7143	25.7143
14	8.57143	42.8571	8.57143	8.57143	8.57143	42.8571	0
15	0	0	35	0	0	25	0
16	15	15	5	5	5	20	0
17	3.5	3	0	4.5	0	0	8
18	6.5	0	4	2	0	3	0
19	0	0	3	0	2	4	5

Variables Continuas

Variables Enteras

TotalDiasProduccion = 1681

Diasdeproduccion [*,*]

:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	12	2	1	1	12	1	0	11	4	0	3	1
2	11	1	9	1	2	0	15	7	1	1	9	9
3	12	0	9	3	0	0	15	1	0	8	9	9
4	5	13	15	0	7	6	14	20	35	0	14	22
5	7	0	0	20	0	8	0	7	52	0	14	43
6	29	0	10	5	16	0	29	0	0	43	0	19
7	0	47	0	0	0	17	0	0	0	42	0	0
8	0	0	0	12	0	0	0	26	0	0	12	0
9	0	0	0	0	0	10	0	0	10	0	0	10
10	10	0	0	0	12	0	0	0	12	0	0	0
11	0	10	0	0	0	0	12	0	0	0	12	0
12	0	10	0	0	0	0	12	0	0	0	12	0
13	17	9	0	52	0	31	2	17	25	27	0	26
14	25	0	2	35	41	0	24	27	2	0	24	26
15	15	0	2	13	18	12	5	25	0	0	15	15
16	10	0	35	0	0	20	0	25	0	0	15	15
17	8	0	3	0	0	2	7	0	6	0	7	3
18	8	0	3	0	3	2	3	0	7	0	5	5
19	4	2	4	0	3	0	5	0	7	0	11	0

MILP: sobre las soluciones

TotalDiasProduccion = 1675.86

Diasdeproduccion [*,*]

:	1	2	3	4	5	6	7
1	12	0	0	4.2324	7.7676	4	8
2	9	9	0	3	3	0	15
3	9	3	6	0	3	9	9
4	13.6585	0	0	6.82927	6.82927	6.82927	6.82927
5	0	20.4878	6.82927	0	6.82927	0	34.1463
6	6.82927	20.4878	0	0	13.6585	0	34.1463
7	0	0	0	0	35.2	0	12
8	0	0	0	14	0	0	0
9	0	0	0	0	0	10	0
10	0	10	0	0	0	12	0
11	0	10	0	0	0	12	0
12	0	0	10	0	0	0	0
13	8.57143	25.7143	8.57143	8.57143	[illegible].7143	25.7143	25.7143
14	8.57143	42.8571	8.57143	8.57143	8.57143	42.8571	0
15	0	0	35	0	0	25	0
16	15	15	5	5	5	20	0
17	3.5	3	0	4.5	0	0	8
18	6.5	0	4	2	0	3	0
19	0	0	3	0	2	4	5

Variables Continuas

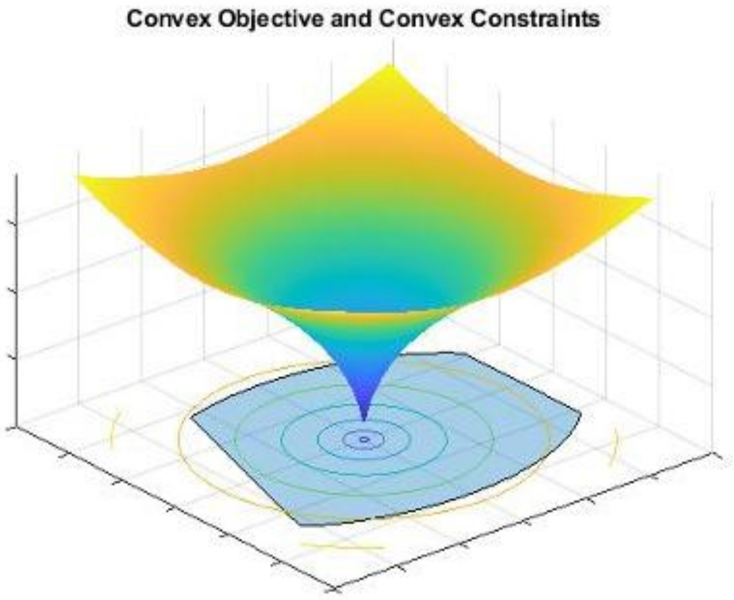
Variables Enteras

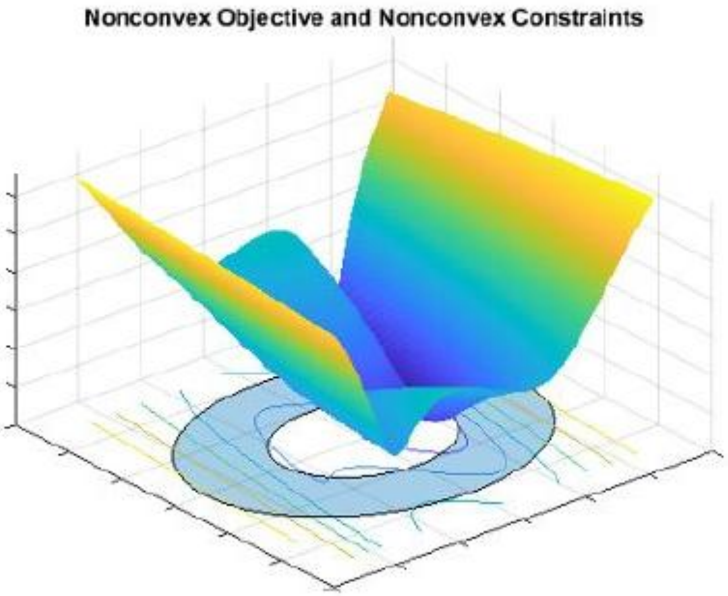
TotalDiasProduccion = 1681

Diasdeproduccion [*,*]

:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	12	2	1	1	12	1	0	11	4	0	3	1
2	11	1	9	1	2	0	15	7	1	1	9	9
3	12	0	9	3	0	0	15	1	0	8	9	9
4	5	13	15	0	7	6	14	20	35	0	14	22
5	7	0	0	20	0	8	0	7	52	0	14	43
6	29	0	10	5	16	0	29	0	0	43	0	19
7	0	47	0	0	0	17	0	0	0	42	0	0
8	0	0	0	12	0	0	0	26	0	0	12	0
9	0	0	0	0	0	10	0	0	10	0	0	10
10	10	0	0	0	12	0	0	0	12	0	0	0
11	0	10	0	0	0	0	12	0	0	0	12	0
12	0	10	0	0	0	0	12	0	0	0	12	0
13	17	9	0	52	[illegible]	31	2	17	25	27	0	26
14	25	0	2	35	41	0	24	27	2	0	24	26
15	15	0	2	13	18	12	5	25	0	0	15	15
16	10	0	35	0	0	20	0	25	0	0	15	15
17	8	0	3	0	0	2	7	0	6	0	7	3
18	8	0	3	0	3	2	3	0	7	0	5	5
19	4	2	4	0	3	0	5	0	7	0	11	0

Optimización: la importancia de la convexidad

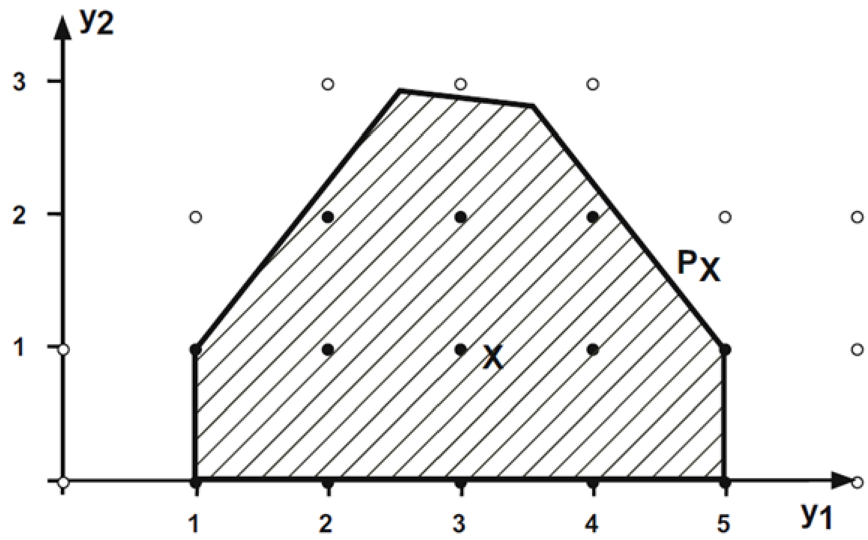




Fuente: https://la.mathworks.com/discovery/convex-optimization.html

MILP: Envoltura Convexa

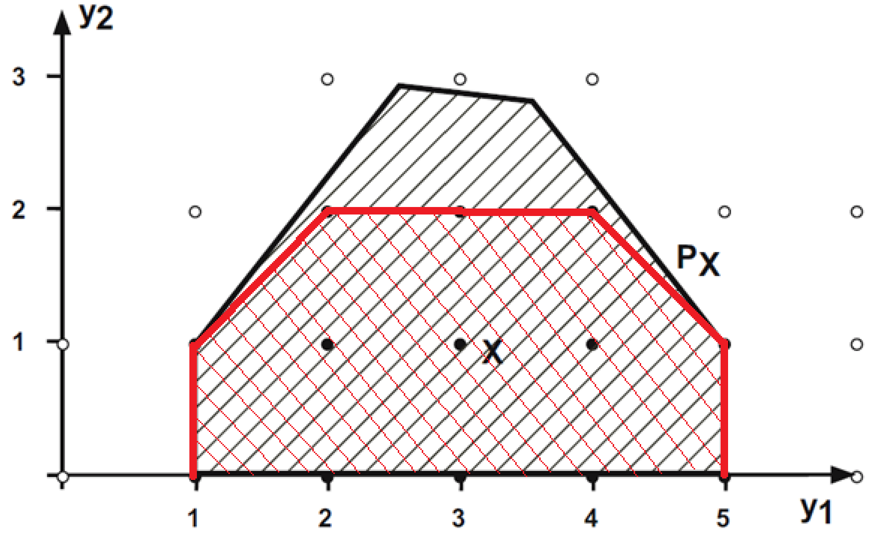
- Región convexa definida por un LP (región rayada) e IP (puntos negros).



Fuente: Pochet & Wolsey (2006): *Production Planning by Mixed Integer Programming*

MILP: Envoltura Convexa

- **Conjunto convexo mínimo para un problema P**, que incluye todos las soluciones factibles del problema MILP o IP.

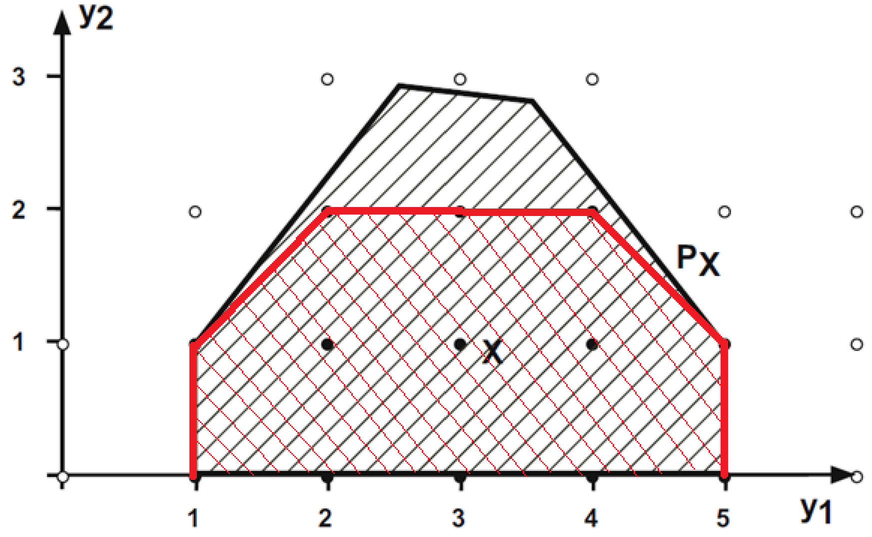


Fuente: Pochet & Wolsey (2006): *Production Planning by Mixed Integer Programming*

MILP: Envoltura Convexa

- **Conjunto convexo mínimo para un problema P**, que incluye todos las soluciones factibles del problema MILP o IP.

Observación: Para dos formulaciones P y P’ se dice que P es mejor o más fuerte que P’ si: P ⊆ P’

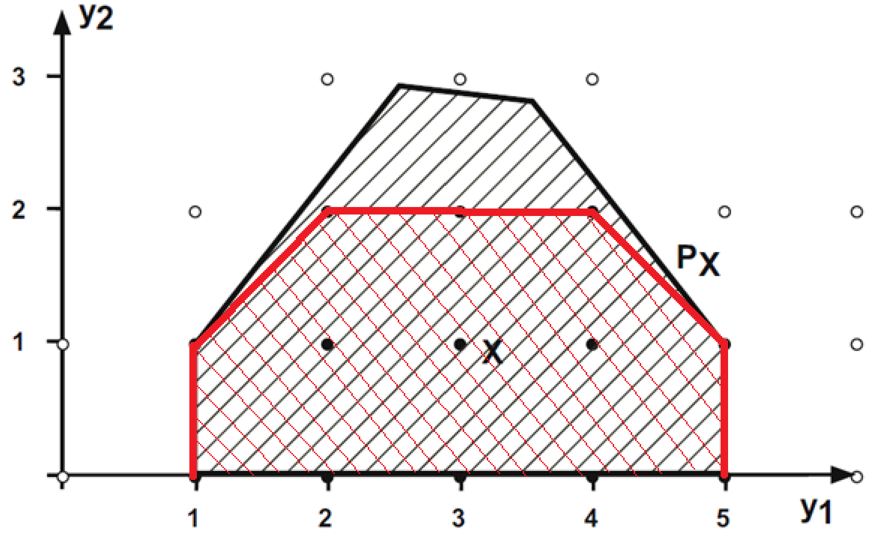


Fuente: Pochet & Wolsey (2006): *Production Planning by Mixed Integer Programming*

MILP: Envoltura Convexa

- **Conjunto convexo mínimo para un problema P**, que incluye todos las soluciones factibles del problema MILP o IP.

Observación:
Para dos formulaciones P y P' se dice que P es mejor o más fuerte que P' si: P ⊆ P'



Observación:
La formulación *conv*(P_X) es la mejor formulación posible ya que para cualquier otra formulación P se cumple que *conv*(P_X) ⊆ P

Fuente: Pochet & Wolsey (2006): *Production Planning by Mixed Integer Programming*

Método de Branch-and-Bound

- Estrategia de **enumeración implicita** a través de ramificación y acotamiento, que genera un árbol de búsqueda.
- En cada nodo del árbol se resuelve un **problema relajado** de LP, eliminando las restricciones de integralidad sobre las variables.
- **Ramificación**: Si la solución del problema de un nodo no es entera en alguna de las variables que se requiere, se toma una de ellas y se generan dos subproblemas (dos nodos nuevos del árbol), con restricciones para eliminar los valores fraccionales de la variable.
- **Acotamiento**: Se usan reglas de vaciamiento o poda, para finalizar la búsqueda en un camino del árbol (peor que la mejor solución hasta el momento; el problema no es factible; la solución es entera en las variables requeridas).
- Termina cuando no hay más nodos (subproblemas) a explorar.

Método de Branch-and-Bound

Ailsa H. Land
(1927 – 2021)

Alison G. Doig (now Harcourt)
(1929 -)

ECONOMETRICA

VOLUME 28 July, 1960 NUMBER 3

AN AUTOMATIC METHOD OF SOLVING DISCRETE PROGRAMMING PROBLEMS

BY A. H. LAND AND A. G. DOIG

In the classical linear programming problem the behaviour of continuous, nonnegative variables subject to a system of linear inequalities is investigated. One possible generalization of this problem is to relax the continuity condition on the variables. This paper presents a simple numerical algorithm for the solution of programming problems in which some or all of the variables can take only discrete values. The algorithm requires no special techniques beyond those used in ordinary linear programming, and lends itself to automatic computing. Its use is illustrated on two numerical examples.

"Alison Harcourt y Ailsa Land, dos matemáticas unidas por la programación lineal" (ver)

Ejemplo LP: Formulación

Max $65x + 70y$

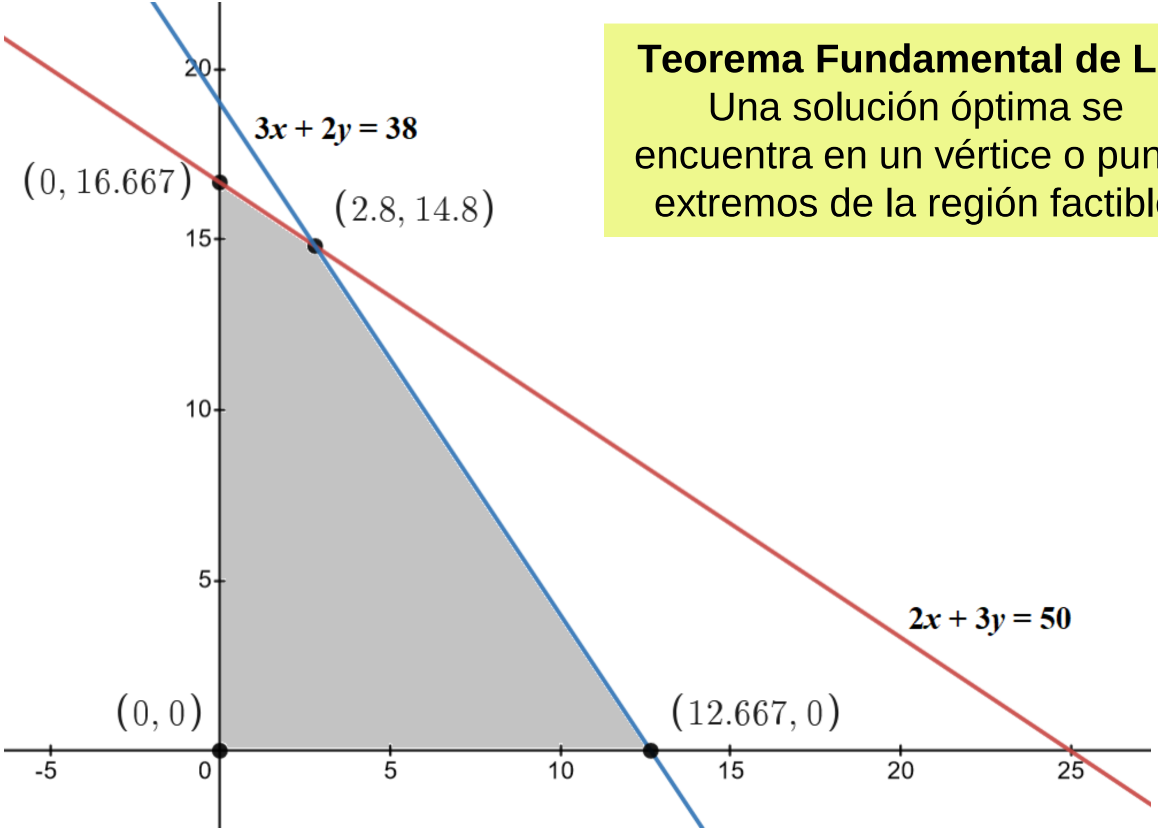
sujeto a:

$2x + 3y \leq 50$ (cap. máq. A)

$3x + 2y \leq 38$ (cap. máq. B)

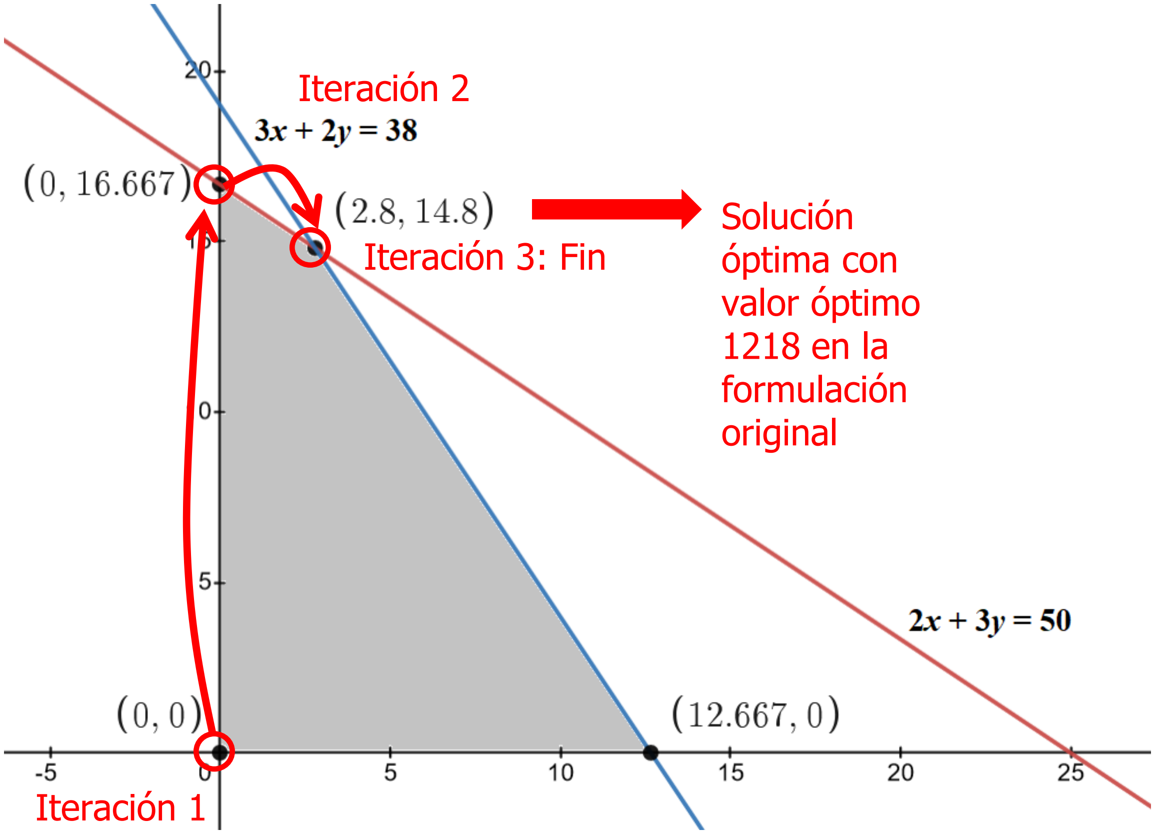
$x, y \geq 0$

Ejemplo LP: Resolución Método Gráfico



Teorema Fundamental de LP: Una solución óptima se encuentra en un vértice o punto extremos de la región factible

Ejemplo LP: Resolución Método Simplex



Ejemplo MILP: Formulación

$$\text{Max } 65x + 70y$$

sujeto a:

$$2x + 3y \leq 50 \text{ (cap. máq. } A\text{)}$$

$$3x + 2y \leq 38 \text{ (cap. máq. } B\text{)}$$

$$x, y \geq 0, \text{ enteros}$$

	x^*	y^*	z^*
LP	2.8	14.8	1218
MILP	?	?	?

Ejemplo MILP: Formulación

$$\text{Max } 65x + 70y$$

sujeto a:

$$2x + 3y \leq 50 \ \text{(cap. máq. } A\text{)}$$

$$3x + 2y \leq 38 \ \text{(cap. máq. } B\text{)}$$

$$x, y \geq 0, \text{ enteros}$$

	x^*	y^*	z^*
LP	2.8	14.8	1218
MILP	1	16	1185

Parte 2

Economic Lot-Sizing Problem (ELSP)

- Planificación de la producción de tiempo discreto (períodos) con demanda dinámica, sin restricciones de capacidad.
- Satisfacer la demanda de un producto a tiempo (sin retrasos), durante un horizonte de planificación finito (cantidad de períodos).
- Costos unitarios de producción y de mantener en inventario.
- Costos de configuración (set-up) por cada vez que se produce una cantidad positiva.
- Inventario inicial cero (s.p.d.g.).

Economic Lot-Sizing Problem (ELSP)

22 días
Costo set-up = $200
Costo prod. = $2
Costo inv. = $1

Lot Fix Size (LFS) = 500					
Día	**Demanda**	**Prod.**	**Set-up**	**Inv.**	**Costo**
1	53	500	1	447	1647
2	115		0	332	332
3	95		0	237	237
4	114		0	123	123
5	80		0	43	43
6	103	500	1	440	1640
7	131		0	309	309
8	107		0	202	202
9	81		0	121	121
10	59		0	62	62
11	123	500	1	439	1639
12	100		0	339	339
13	109		0	230	230
14	123		0	107	107
15	77		0	30	30
16	97	500	1	433	1633
17	101		0	332	332
18	131		0	201	201
19	92		0	109	109
20	116	500	1	493	1693
21	123		0	370	370
22	68		0	302	302
				Costo $	**11701**

Economic Lot-Sizing Problem (ELSP)

22 días
Costo set-up = $200
Costo prod. = $2
Costo inv. = $1

Lot For Lote (L4L)					
Día	**Demanda**	**Prod.**	**Set-up**	**Inv.**	**Costo**
1	53	53	1	0	306
2	115	115	1	0	430
3	95	95	1	0	390
4	114	114	1	0	428
5	80	80	1	0	360
6	103	103	1	0	406
7	131	131	1	0	462
8	107	107	1	0	414
9	81	81	1	0	362
10	59	59	1	0	318
11	123	123	1	0	446
12	100	100	1	0	400
13	109	109	1	0	418
14	123	123	1	0	446
15	77	77	1	0	354
16	97	97	1	0	394
17	101	101	1	0	402
18	131	131	1	0	462
19	92	92	1	0	384
20	116	116	1	0	432
21	123	123	1	0	446
22	68	68	1	0	336
				Costo $	**8796**

Economic Lot-Sizing Problem (ELSP)

22 días
Costo set-up = $200
Costo prod. = $2
Costo inv. = $1

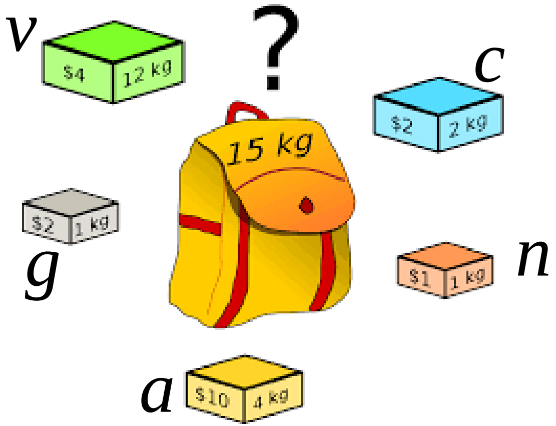
MILP					
Día	**Demanda**	**Prod.**	**Set-up**	**Inv.**	**Costo**
1	53	168	1	115	651
2	115	0	0	0	0
3	95	209	1	114	732
4	114	0	0	0	0
5	80	183	1	103	669
6	103	0	0	0	0
7	131	238	1	107	783
8	107	0	0	0	0
9	81	140	1	59	539
10	59	0	0	0	0
11	123	223	1	100	746
12	100	0	0	0	0
13	109	109	1	0	418
14	123	200	1	77	677
15	77	0	0	0	0
16	97	198	1	101	697
17	101	0	0	0	0
18	131	223	1	92	738
19	92	0	0	0	0
20	116	307	1	191	1005
21	123	0	0	68	68
22	68	0	0	0	0
				Costo $	**7723**

Economic Lot-Sizing Problem (ELSP)

- La formulación MILP tiene **variables binarias** para indicar si en un período determinado se realiza o no producción (aplicar o no el costos de set-up), y **variables continuas** para las cantidades a producir y las cantidades a mantener en inventario en cada período.
- Se puede formular como un problema de **Flujos en Red** (asegura los valores enteros de las cantidades a producir).
- Wagner y Whitin en 1958, proponen un algoritmo eficiente para la resolución del ELSP, basado en la **propiedad de inventario cero** (ZIP).

Knapsack Problem (problema de la mochila)

- Cuántos objetos introducir a una mochila con capacidad finita, para maximizar el valor total del contenido.
- Cada objeto tiene un valor y un peso o volumen.
- Wikipedia:



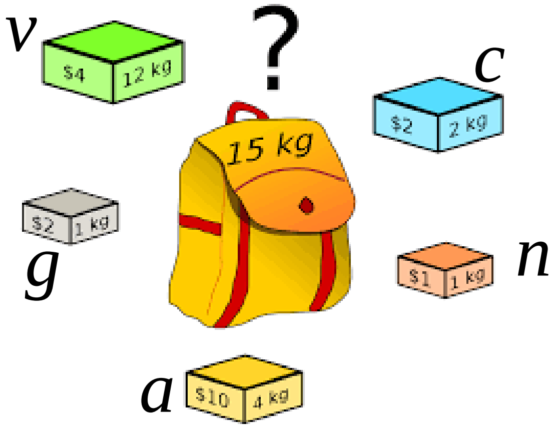
Knapsack Problem

$$\text{Max } mochila = 4v + 2g + 2c + 1n + 10a$$

sujeto a:

$$12v + g + 2c + n + 4a \leq 15$$

$$v, g, c, n, a \geq 0$$



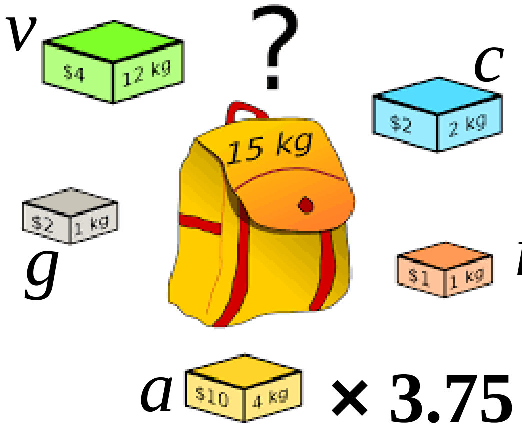
Knapsack Problem

$$\text{Max } mochila = 4v + 2g + 2c + 1n + 10a$$

sujeto a:

$$12v + g + 2c + n + 4a \leq 15$$

$$v, g, c, n, a \geq 0$$



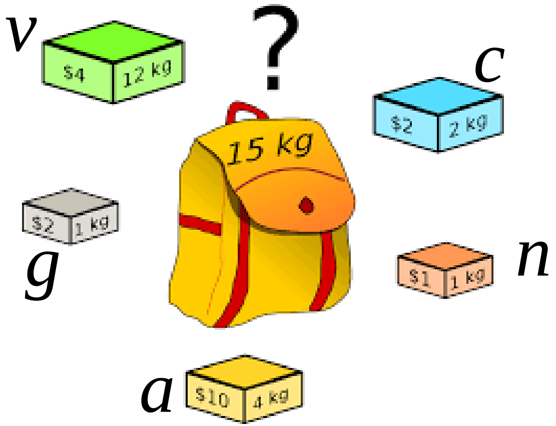
Knapsack Problem

$$\text{Max } mochila = 4v + 2g + 2c + 1n + 10a$$

sujeto a:

$$12v + g + 2c + n + 4a \leq 15$$

$v, g, c, n, a \geq 0$, enteros



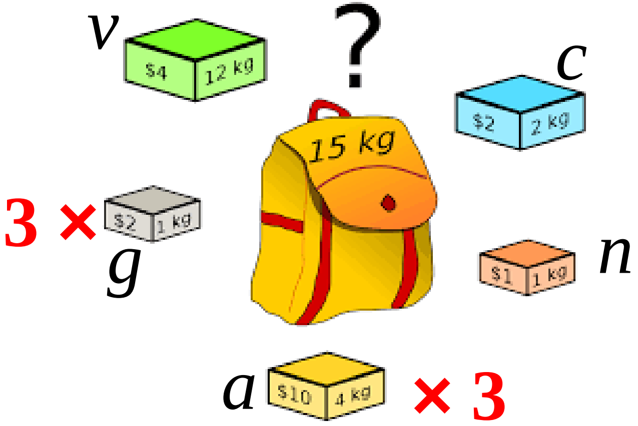
Knapsack Problem

Max $mochila = 4v + 2g + 2c + 1n + 10a$

sujeto a:

$12v + g + 2c + n + 4a \leq 15$

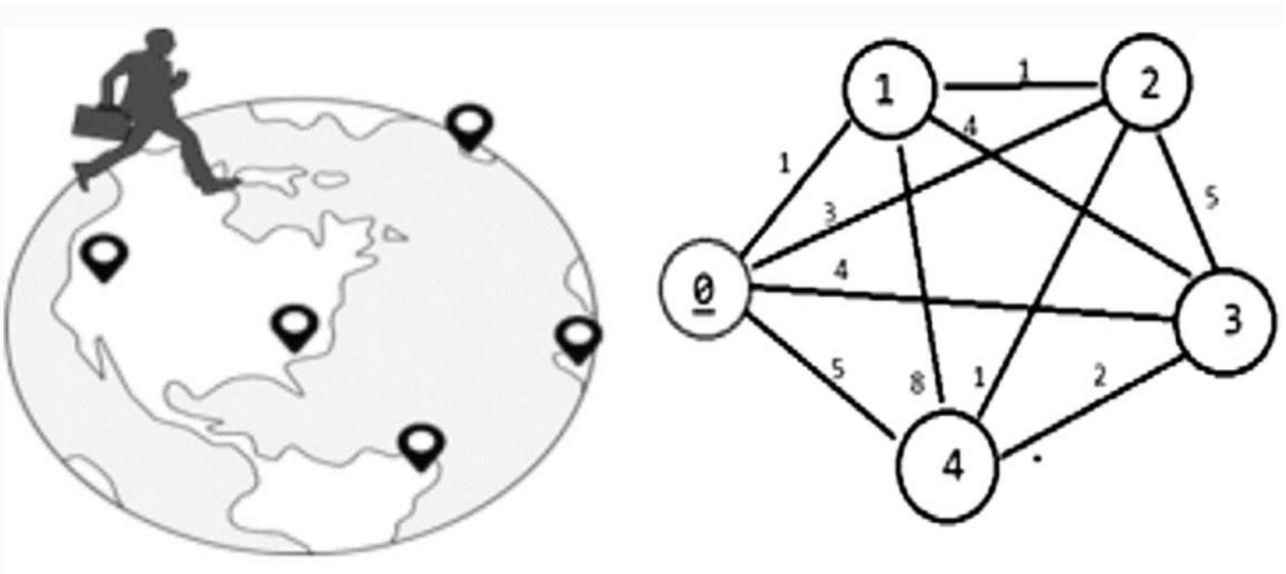
$v, g, c, n, a \geq 0$, enteros



Problema del vendedor viajero (TSP)

- Dado un conjunto de ciudades, determinar la recorrida de menor distancia total, pasando una única vez por cada ciudad y finalizando en la misma ciudad de partida.
- Se puede representar como un grafo, en donde cada nodo representa una ciudad y cada arco la distancia entre ciudades (si existe el camino).

Problema del vendedor viajero (TSP)



Fuente: https://link.springer.com/article/10.1007/s10922-018-9469-9/

Problema del vendedor viajero (TSP)

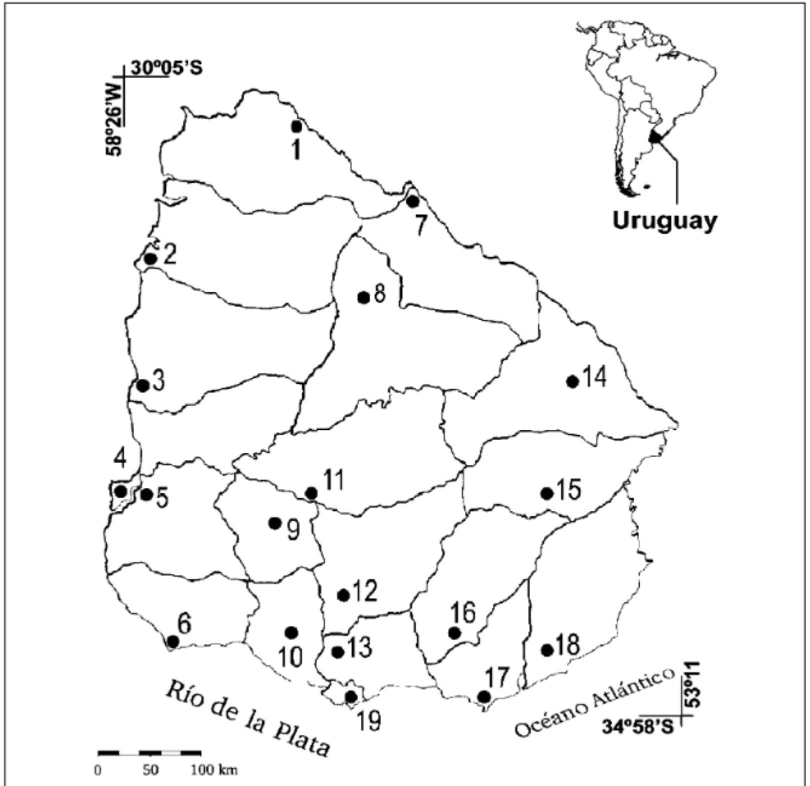


Fig. 1. Mapa del área de estudio mostrando los departamentales y sus capitales (1-19). (1: Artigas, 2: Salto, 3: Paysandú, 4: Río Negro, 5: Mercedes, 6: Colonia del Sacramento, 7: Rivera, 8: Tacuarembó, 9: Trinidad, 10: San José de Mayo, 11: Durazno, 12: Florida, 13: Canelones, 14: Melo, 15: Treinta y Tres, 16: Minas, 17: Maldonado, 18: Rocha, 19: Montevideo.)

Fuente: Rossi & Martinez (2013)

Partiendo de Artigas, encontrar un recorrido por todas las ciudades capitales del país, que minimice la distancia total recorrida.

Problema del vendedor viajero (TSP)

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	Artigas	*	555	611	418	503	435	748	392	435	711	601	325	183	671	207	580	211	503	459
2	Canelones	555	*	145	137	52	268	155	378	237	131	46	332	455	220	450	47	344	282	151
3	Colonia	611	145	*	218	178	207	301	507	176	276	177	286	549	360	404	108	429	427	176
4	Durazno	418	137	218	*	85	201	298	418	170	273	183	229	318	363	348	136	207	424	41
5	Florida	503	52	178	85	*	286	209	329	255	184	98	318	403	274	437	88	292	355	126
6	Fray Bentos	435	268	207	201	286	*	422	622	31	395	309	110	452	483	228	220	341	546	160
7	Maldonado	748	155	301	298	209	422	*	325	391	75	134	487	572	85	605	202	509	212	301
8	Melo	392	378	507	418	329	622	325	*	590	276	387	435	262	285	428	407	204	113	460
9	Mercedes	435	237	176	170	255	31	391	590	*	363	278	110	452	452	228	189	341	415	129
10	Minas	711	131	276	273	184	395	75	276	363	*	122	463	604	132	582	182	484	164	276
11	Montevideo	601	46	177	183	98	309	134	387	278	122	*	378	501	210	496	93	390	286	188
12	Paysandú	325	332	286	229	318	110	487	435	110	463	378	*	342	553	118	285	231	614	190
13	Rivera	183	455	549	318	403	452	572	262	452	604	501	342	*	541	335	473	111	373	359
14	Rocha	671	220	360	363	274	483	85	285	452	132	210	553	541	*	672	272	490	172	366
15	Salto	207	450	404	348	437	228	605	428	228	582	496	118	335	672	*	403	224	534	309
16	San José	580	47	108	136	88	220	202	407	189	182	93	285	473	272	403	*	353	327	95
17	Tacuarembó	211	344	429	207	292	341	509	204	341	484	390	231	111	490	224	353	*	320	248
18	Treinta y Tres	503	282	427	424	335	546	212	113	514	164	286	614	373	172	534	327	320	*	427
19	Trinidad	459	151	176	41	126	160	301	460	129	276	188	190	359	366	309	95	248	427	*

Fuente: viatermal.com

Problema del vendedor viajero (TSP)

Solución: Ir a la ciudad más cercana no visitada aun

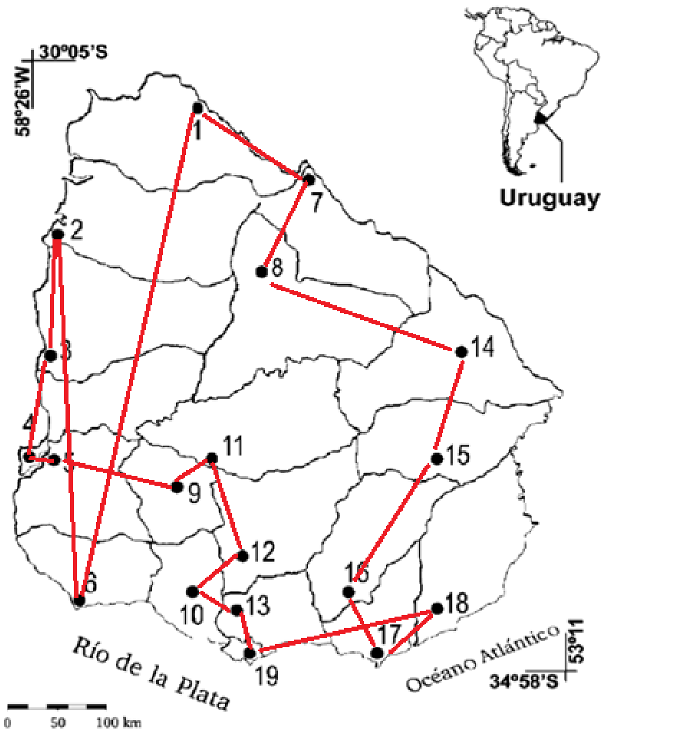


Fig. 1. Mapa del área de estudio mostrando los departamentales y sus capitales (1-19). (1: Artigas, 2: Salto, 3: Paysandú, 4: Río Negro, 5: Mercedes, 6: Colonia del Sacramento, 7: Rivera, 8: Tacuarembó, 9: Trinidad, 10: San José de Mayo, 11: Durazno, 12: Florida, 13: Canelones, 14: Melo, 15: Treinta y Tres, 16: Minas, 17: Maldonado, 18: Rocha, 19: Montevideo.)

Fuente: viatermal.com

Artigas
Rivera
Tacuarembó
Melo
Treinta y Tres
Minas
Maldonado
Rocha
Montevideo
Canelones
San José
Florida
Durazno
Trinidad
Mercedes
Fray Bentos
Paysandú
Salto
Colonia
2855 km

Problema del vendedor viajero (TSP)

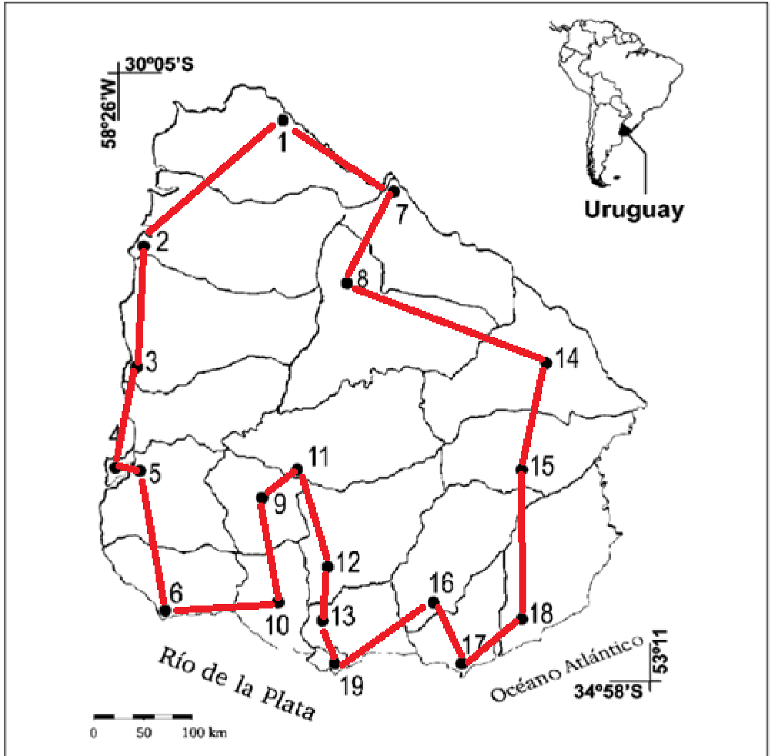


Fig. 1. Mapa del área de estudio mostrando los departamentales y sus capitales (1-19). (1: Artigas, 2: Salto, 3: Paysandú, 4: Río Negro, 5: Mercedes, 6: Colonia del Sacramento, 7: Rivera, 8: Tacuarembó, 9: Trinidad, 10: San Josè de Mayo, 11: Durazno, 12: Florida, 13: Canelones, 14: Melo, 15: Treinta y Tres, 16: Minas, 17: Maldonado, 18: Rocha, 19: Montevideo.)

Artigas
Rivera
Tacuarembó
Melo
Treinta y Tres
Rocha
Maldonado
Minas
Montevideo
Canelones
Florida
Durazno
Trinidad
San José
Colonia
Mercedes
Fray Bentos
Paysandú
Salto
2134 km

Fuente: viatermal.com

Problema del vendedor viajero (TSP)

18!
alternativas
diferentes…
más de
640237×10^{10}

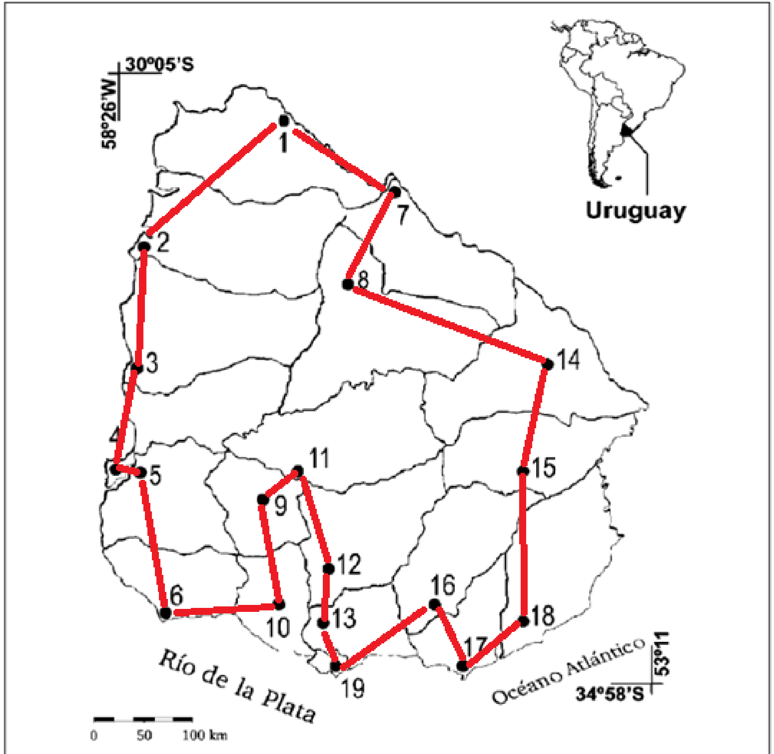


Fig. 1. Mapa del área de estudio mostrando los departamentales y sus capitales (1-19). (1: Artigas, 2: Salto, 3: Paysandú, 4: Río Negro, 5: Mercedes, 6: Colonia del Sacramento, 7: Rivera, 8: Tacuarembó, 9: Trinidad, 10: San José de Mayo, 11: Durazno, 12: Florida, 13: Canelones, 14: Melo, 15: Treinta y Tres, 16: Minas, 17: Maldonado, 18: Rocha, 19: Montevideo.)

Artigas
Rivera
Tacuarembó
Melo
Treinta y Tres
Rocha
Maldonado
Minas
Montevideo
Canelones
Florida
Durazno
Trinidad
San José
Colonia
Mercedes
Fray Bentos
Paysandú
Salto
2134 km

Fuente: viatermal.com

Problema del vendedor viajero (TSP)

- Para el MILP del TSP, hay que considerar restricciones para eliminar los *subtours* (recorridos inválidos), denominadas SECs.
- **DFJ**: Dantzig, Fulkerson y Johnson (1954), proponen una cantidad exponencial de SECs, que describe la envoltura convexa del problema.
- **MTZ**: Miller, Tucker y Zemlin (1960), proponen una cantidad polinomial de SECs, con una relajación débil a LP.
- Más información en Bektas y Gouveia (2014).

Parte 3

Problema de diseño eficiente de red de caminería

Se desea construir una red de caminos para comunicar cuatro potenciales proyectos forestales a desarrollar, con un camino principal existente (ruta). Cada proyecto que se elige desarrollar, se debe desarrollar por completo, o no desarrollarse. Hay un costo asociado a cada sección de camino a construir, que depende de las características topográficas del terreno. Cada proyecto tiene asociado un beneficio por la producción de madera y un beneficio por el uso recreativo, así como un costo de instalación. Los proyectos seleccionados a desarrollar deben garantizar un cierto nivel mínimo para el uso recreativo y de producción de madera por año. Se debe determinar que proyectos desarrollar y que secciones de camino construir, para minimizar los costos totales de instalación de caminería y de desarrollo de los proyectos.

Extraído de: J. Buongiorno, J. Keith Gilless, "*Decision Methods for Forest Resource Management*", Academic Press, 2003, Chapter 11.

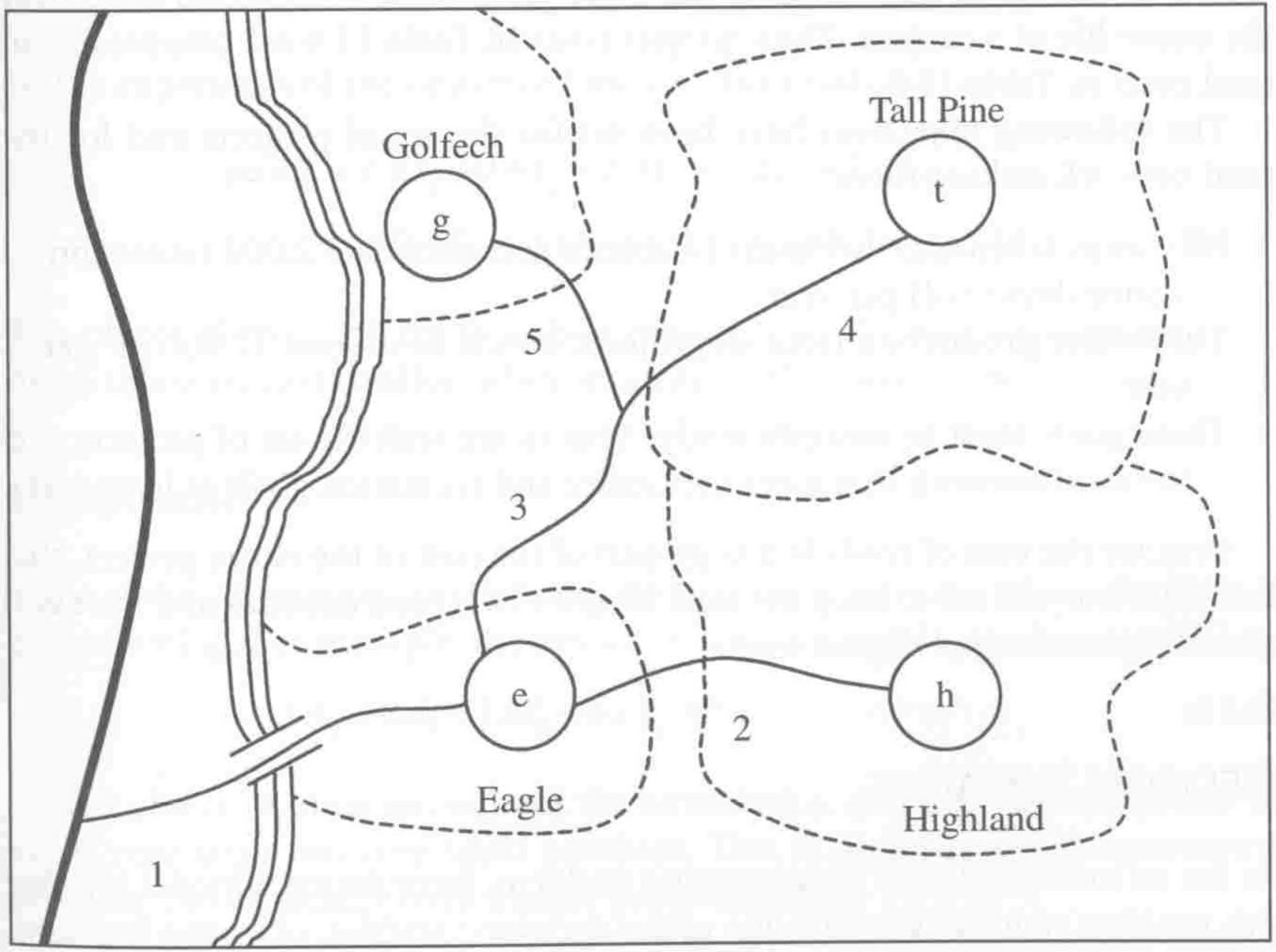


FIGURE 11.6 Road network for multiple-use forest development. Dotted lines indicate the project boundaries.

Fuente: J. Buongiorno, J. Keith Gilless, "Decision Methods for Forest Resource Management", Academic Press, 2003, Chapter 11.

TABLE 11.3 Cost of Building Each Road Section

	Section				
	1	2	3	4	5
Cost (10^6 \$)	0.8	0.4	0.3	0.2	0.4

TABLE 11.4 Output and Cost, by Project

	Project			
Result	Eagle, *e*	Highland, *h*	Tall Pine, *t*	Golfech, *g*
Recreation (10^3 rvd)	1	1	2	3
Timber (10^3 m^3)	6	8	13	10
Cost (10^6 \$)	0.7	0.1	0.5	0.8

rvd: recreation visitor days

Fuente: J. Buongiorno, J. Keith Gilless, "Decision Methods for Forest Resource Management", Academic Press, 2003, Chapter 11.

Formulación IP original

Conjuntos:

- $I = \{1,\ldots,5\}$: secciones de camino a construir
- $J = \{e, h, t, g\}$: proyectos a desarrollar

Parámetros:

- cs_i: costo de construir la sección de camino $i \in I$
- cp_j : costo de desarrollar el proyecto $j \in J$
- m_j: cantidad esperada de madera del proyecto $j \in J$ ($10^3 m^3$)
- M: cantidad mínima de madera necesaria ($10^3 m^3$)
- v_j: cantidad esperada de visitantes diarios del proyecto $j \in J$ (10^3)
- V: cantidad mínima de visitantes diarios a atender (10^3)

Variables:

- $X_j \in \{0,1\}$: 1 si se desarrolla el proyecto $j \in J$, 0 si no
- $Y_i \in \{0,1\}$: 1 si se construye la sección de camino $i \in I$, 0 si no

Formulación IP original

- **Función objetivo**: minimizar la suma de los costos de construir secciones de camino y de desarrollar los proyectos.
- **Restricción de madera**: garantizar la cantidad mínima de madera total.
- **Restricción de recreación**: garantizar la cantidad de recreación total.
- **Restricción proyecto y secciones**: si se desarrolla un proyecto, se debe construir la sección de camino de acceso directo.
- **Restricción entre secciones**: si se construye una sección, se deben construir las secciones que le dan acceso al camino principal (ruta).

Formulación IP alternativa

Conjuntos:

- $I = \{1,\ldots,5\}$: secciones de camino a construir
- $J = \{e, h, t, g\}$: proyectos a desarrollar
- S_j: secciones de caminos para llegar al proyecto $j \in J$

Parámetros:

- cs_i: costo de construir la sección de camino $i \in I$
- cp_j : costo de desarrollar el proyecto $j \in J$
- m_j: cantidad esperada de madera del proyecto $j \in J$ ($10^3 m^3$)
- M: cantidad mínima de madera necesaria ($10^3 m^3$)
- v_j: cantidad esperada de visitantes diarios del proyecto $j \in J$ (10^3)
- V: cantidad mínima de visitantes diarios a atender (10^3)

Variables:

- $X_j \in \{0,1\}$: 1 si se desarrolla el proyecto $j \in J$, 0 si no
- $Y_i \in \{0,1\}$: 1 si se construye la sección de camino $i \in I$, 0 si no

Formulación IP alternativa

Min $\sum_{i \in I} cs_i Y_i + \sum_{j \in J} cp_j X_j$

sujeto a:

$\sum_{j \in J} m_j X_j \geq M$ [madera]

$\sum_{j \in J} v_j X_j \geq V$ [recreación]

$|S_j| X_j \leq \sum_{i \in S_j} Y_i, \quad \forall j \in J$ [proyectos y secciones]

$X_j \in \{0,1\}, \ \forall j \in J$ [dominio]

$Y_i \in \{0,1\}, \ \forall i \in I$ [dominio]

Extensiones al problema

- Los proyectos se pueden desarrollar de forma parcial.
- Costo inicial (start-up) independiente de los proyectos a desarrollar.