Modelos de optimización para aplicaciones forestales

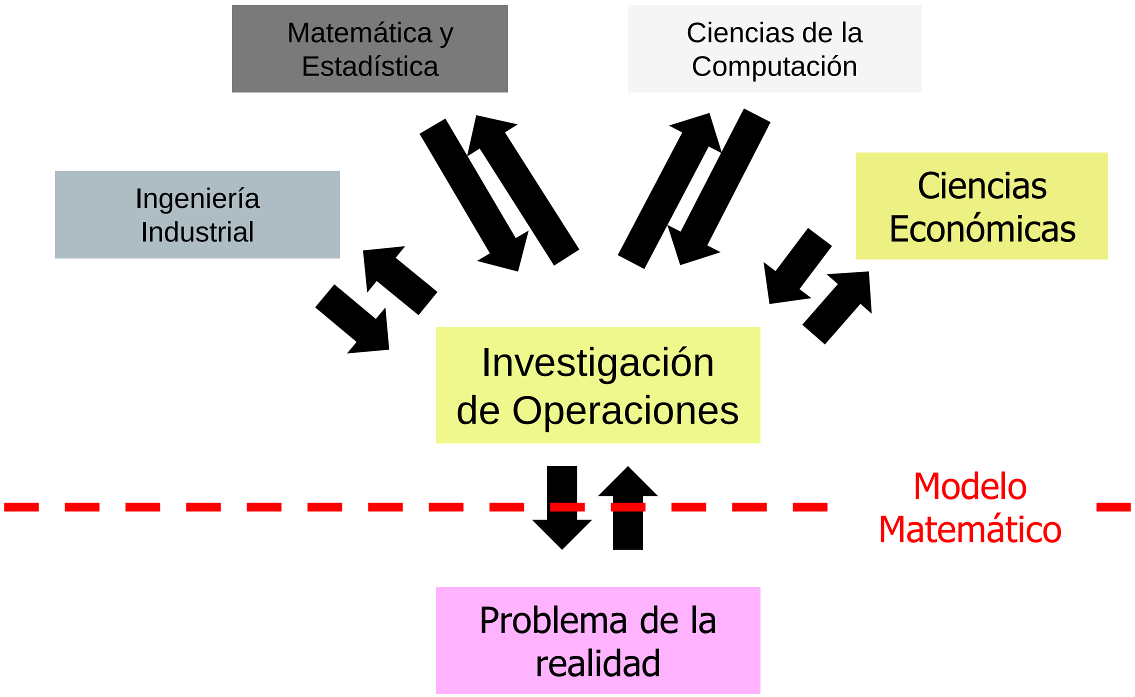
Clase 2 - Modelos de Programación Lineal

Contenido

- Parte 1:
    - Características generales de los modelos de Programación Matemática.
    - Ejemplos de aplicaciones de la Programación Matemática.
    - Conceptos generales de Optimización.
- Parte 2:
    - Características de los modelos de Programación Lineal.
    - Fundamentos del Método Simplex.
- Parte 3:
    - Ejemplos de Programación Lineal aplicados a problemas forestales.

Parte 1

Contexto


Matemática y Estadística
Ciencias de la Computación
Ingeniería Industrial
Ciencias Económicas
Investigación de Operaciones
Modelo Matemático
Problema de la realidad

Modelos Matemáticos

- **Representación simplificada de la realidad utilizando el lenguaje matemático** (expresiones con símbolos y números)**.**
- Simplificación: proceso de abstracción para identificar lo esencial de lo que se quiere estudiar.
- Poder predecir el comportamiento, encontrar una solución válida (factibilidad), o la mejor solución válida (optimizar).
- En general no es posible o es muy costoso experimentar con el problema real.
- **Apoyo para la toma de decisiones en sistemas complejos.**
- La experimentación con el modelo se realiza con el apoyo de computadoras, a través de software de optimización (solvers) y/o de simulación.

Modelos Matemáticos

- Puede existir más de un modelo “correcto” para un mismo problema.
- Suposiciones sobre la realidad (simplificación).
- Recolección y análisis de datos (errores e incertidumbre).
- **El modelado es un proceso creativo e iterativo, que en general se realiza en equipo. Requiere práctica.**
- Validación para encontrar errores o posibles mejoras.
- Implementación de la o las soluciones obtenidas (en general, la parte más difícil).
- Para los problemas de gestión, suelen utilizarse modelos de Programación Matemática, Teoría de Grafos y Simulación, entre otros.

Programación Matemática

- **Modelo matemático de optimización** que consta de:
  - **Conjuntos (agrupación lógica de entidades)**
  - **Parámetros (valores predeterminados que se asumen conocidos)**
  - **Variables de decisión (valores que se quieren determinar)**
  - **Función objetivo (max, min)**
  - **Restricciones (inecuaciones o ecuaciones y dominio de las variables)**
- Se aplica en general a problemas bien definidos (enfoque *hard OR*).
- Determinar la mejor solución dentro de un conjunto de alternativas posibles (soluciones factibles), ya sea este conjunto infinito o finito pero muy grande (**optimización combinatoria**).
- **Clasificación**: según la forma de la función objetivo, de las restricciones y el dominio de las variables (continuas o enteras).

Algunos ejemplos de aplicación

- Asignación justa de recursos/agentes a actividades:

Ejemplo: Cómo asignar estudiantes a los turnos de los diferentes cursos, teniendo en cuenta la capacidad máxima definida para cada uno de los turnos y las superposiciones de horario de los turnos, para maximizar la satisfacción de las preferencias de los estudiantes.

Ejemplo: Determinar la agenda de pacientes para el tratamiento de radioterapia, teniendo en cuenta los aspectos médicos, para ajustarse lo más posible a las preferencias de horario los pacientes.

Algunos ejemplos de aplicación

- Planificación de la producción de productos.

Ejemplo: Determinar cuándo y qué cantidad de producto producir en cada período (hora, día, semana, etc), para cumplir con la demanda a tiempo, minimizando los costos totales de producir y de almacenamiento de productos.

Ejemplo: Determinar cuándo y qué cantidad de producto producir y remanufacturar en cada período, para cumplir con la demanda a tiempo, minimizando los costos totales de producir, remanufacturar y de almacenamiento de productos nuevos, remanufacturados y usados.

Algunos ejemplos de aplicación

- Programación de actividades o tareas en máquinas.

Ejemplo: Qué productos fabricar y en qué máquina, teniendo en cuenta compatibilidades entre productos y máquinas, para minimizar el tiempo total de producción (makespan) y poder cumplir con la demanda de cada producto.

Ejemplo: Determinar la grilla (día y hora que debe realizar su actuación cada agrupación), en un espectáculo o competencia artística con restricciones propias del evento, para lograr una asistencia de público equilibrada en cada día.

Algunos ejemplos de aplicación

- Logística y transporte de mercadería.

Ejemplo: Determinar la asignación de un conjunto de clientes distribuidos geográficamente a centros de distribución preinstalados, así como las rutas a realizar para poder cumplir con la demanda de cada cliente, respetando las capacidades de suministro de cada centro y de los vehículos, minimizando los costos totales de transporte (por ej.: distancia o tiempos de rutas).

Algunos ejemplos de aplicación

- Localización de centros de suministro.

Ejemplo: Determinar, dentro de un conjunto finito de alternativas, dónde almacenar kits de ayuda y qué cantidad de cada uno de ellos, para la asistencia a las poblaciónes luego del ocurrencia de un desastre, maximizando el cubrimiento y minimizando la suma de los costos de inventario.

Ejemplo: Dónde instalar servidores de sincronismo en una red de telecomunicaciones, respetando limitaciones de capacidad de sincronismo y garantizando cierta calidad de servicio, para minimizar la suma de los costos de instalación y equilibrando la carga de los servidores.

Algunos ejemplos de aplicación

- Logística forestal.

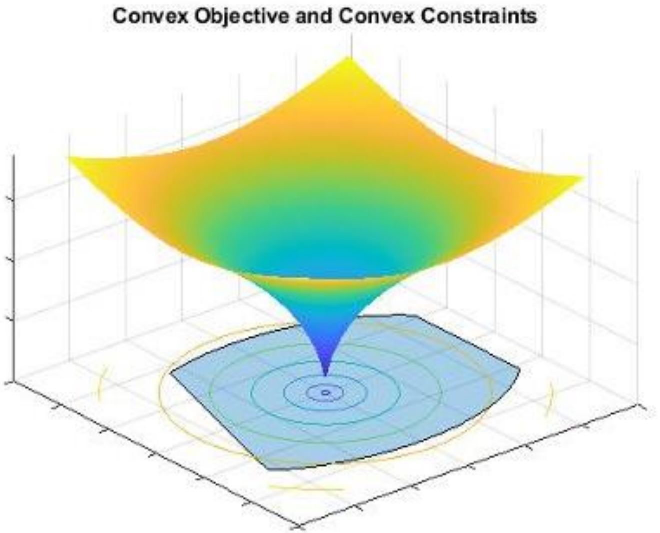
Ejemplo: Determinar la configuración de los árboles, dentro de un conjunto predefinido de alternativas (2 filas, 4 filas, etc), para la aplicación de un sistema de silvopastoreo, teniendo en cuenta características del terreno, de los animales, los árboles y de la interacción entre los mismos, para maximizar las ganancias del sistema respecto a la producción de madera y de carne.

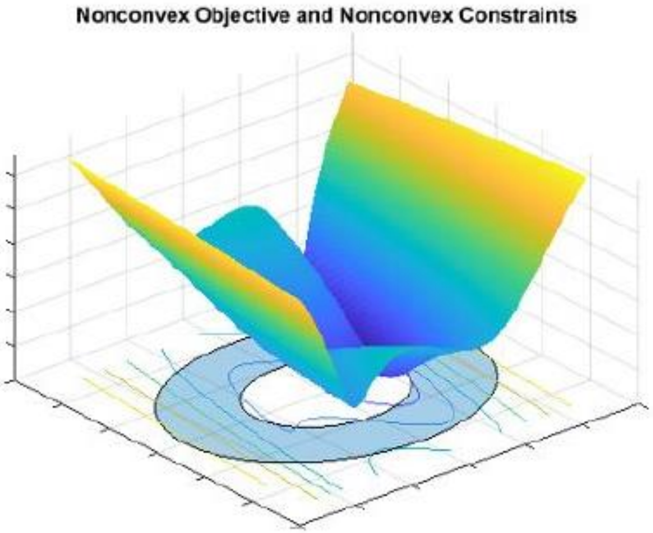
Optimización

- Encontrar la mejor solución posible, de acuerdo a uno o varios criterios (objetivos de min y/o max) y a un conjunto de restricciones (ecuaciones, inecuaciones, dominio).
- Métodos de resolución exactos, aproximados o heurísticos.
- Existen programas informáticos que permiten escribir el modelo en un cierto lenguaje, ingresar los datos necesarios y resolverlos (solver de optimización).
- El procedimiento de resolución a utilizar depende de las características del modelo (clasificación).

Optimización

- La importancia de la convexidad.

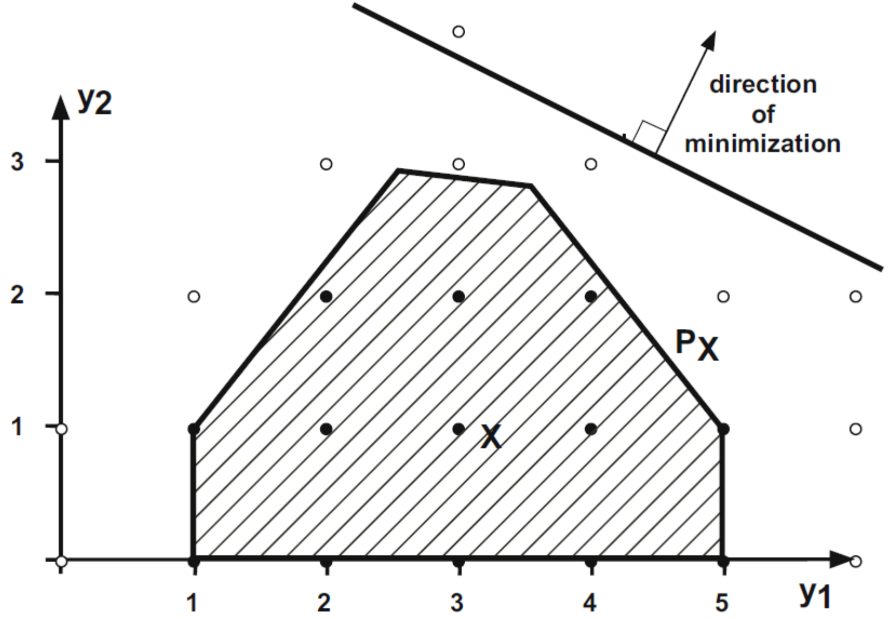




Fuente: https://la.mathworks.com/discovery/convex-optimization.html

Optimización y Programación Matemática

- La importancia de la convexidad.



Fuente: Pochet & Wolsey (2006): *Production Planning by Mixed Integer Programming*

Optimización y Programación Matemática

- **Programación Lineal**: Simplex, Simplex Dual, Interior Point Method, …
- **Programación Entera y Entera-Mixta**: Branch-and-Bound, Cutting Plane Method, Branch-and-Cut, Cut-and-Branch, …, MIP-Heuristics, …
- **Solvers**: CPLEX, Gurobi, GLPK, SCIP, Excel, …
- **Lenguajes de modelado**: AMPL, GAMS, OPL, …

Optimización: Observaciones

- La calidad de una solución óptima depende en gran medida de la calidad de los datos (valores de los parámetros del modelo).
- Análisis de sensibilidad (cambios en los valores de los parámetros) y de post-optimalidad (what-if).
- **La solución óptima es del modelo, no de la realidad** (apoyo para la toma de decisiones).
- Solución óptima vs solución subóptima (tiempos de resolución).
- Más de una solución óptima.
- En algunas ocasiones optimizar puede no ser lo más importante (ej.: datos, factibilidad).

Parte 2

Programación Lineal (LP)

- Uno de los problemas de Programación Matemática más estudiados y extendidos (LP por su nombre en inglés).
- **La función objetivo y las restricciones tienen que ser expresiones lineales**.
- **Las variables de decisión pueden tomar valores continuos (decimales)**.
- El uso del término "Programación " en LP proviene de planificar actividades para optimizar el uso de los recursos.
- LP es un **caso particular de optimización convexa** y existen métodos de resolución efectivos como el Método Simplex (ver más información).

LP: Perspectiva histórica

- Sus orígenes se remontan al estudio de sistemas de inecuaciones lineales a finales del siglo XVIII y comienzos del XIX realizados por Joseph Fourier (1768 - 1830).
- **Leonid Kantorovich** (1912 - 1986), es señalado como el primero en aplicar LP para la optimización del uso de recursos alrededor de 1940. Recibe el Premio Nobel en Economía en 1975 (compartido con T. Koopmans) por sus contribuciones a la Teoría de Optimización.

LP: Perspectiva histórica (cont.)

- **George Dantzig** (1914 - 2005), desarrolla el Método Simplex para la resolución de problemas de LP alrededor de 1947 y los fundamentos teóricos de LP junto con **John von Neumann**. Es conocido como el "Padre" de la Programación Lineal.

- **Narendra Karmarkar** (1956 -), desarrolla un método eficiente (en términos teóricos computacionales) para resolver problemas LP de gran tamaño, en los años 1983/1984, trabajando en IBM y AT&T Bell Laboratories de EEUU.

LP: Características

- **Problema**: asignación de recursos limitados a actividades.
- **Proporcionalidad**: la contribución a la función objetivo y al uso de los recursos, es directamente proporcional al nivel de cada actividad.
- **Adición** (*additivity*): la contribución a la función objetivo y al uso de los recursos es la suma de los niveles de cada actividad considerada independientemente (no depende de la presencia o ausencia de las demás).
- **Divisibilidad**: los niveles de las actividades son valores continuos.
- **Determinismo**: todos los datos se asumen conocidos y precisos (existen extensiones para considerar la incertidumbre en los datos).
- **Resolución**: El tamaño del modelo (cantidad de variables y restricciones) incide en los tiempos de resolución.

LP: Formulación expandida

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\text{Minimize} & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \cdots & + & c_nx_n & = & z \\
\text{Subject to} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
 & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \\
 & x_1, & & x_2, & & \ldots, & & x_n & \geq & 0
\end{array}
$$

LP: Formulación algebraica

$$
\begin{array}{llcll}
\text{Minimize} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & = & z & \\
\text{Subject to} & \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_j x_j & \leq & \mathbf{b} & \\
 & x_j & \geq & 0 & j = 1, 2, \ldots, n
\end{array}
$$

LP: Formulación compacta

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Minimize} & \mathbf{c}^{\mathbf{t}}\mathbf{x} & = & z \\
\text{Subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} & \leq & \mathbf{b} \\
 & \mathbf{x} & \geq & 0
\end{array}
$$

- La f.obj. puede ser de Min o Max, con Min f = – Max – f.
- La restricciones pueden ser de =, ≤ ó ≥. Se puede ir de una a otra formulación, sumando o restando **variables de holgura**.
- La formulación con Min, “=”, lado derecho $b \geq 0$, y dominio de las variables no negativo, se conoce como **Formulación Estándar de LP**.

Ejemplo de LP: Planteo

- Un sistema de producción de dos productos y dos máquinas.
- Para la producción del producto $\boldsymbol{x}$ se requieren 2 horas de la máquina $\boldsymbol{A}$ y 3 horas de la máquina $\boldsymbol{B}$.
- Para la producción del producto $\boldsymbol{y}$ se requieren 3 horas de la máquina $\boldsymbol{A}$ y 2 horas de la máquina $\boldsymbol{B}$.
- La máquina $\boldsymbol{A}$ tiene una disponibilidad de 50 horas a la semana.
- La máquina $\boldsymbol{B}$ tiene una disponibilidad de 38 horas a la semana.
- El precio de venta del producto $\boldsymbol{x}$ es $65.
- El precio de venta del producto $\boldsymbol{y}$ es $70.
- Objetivo: Maximizar las ganancias por semana.

Ejemplo LP: Formulación

$$\text{Max } 65x + 70y$$

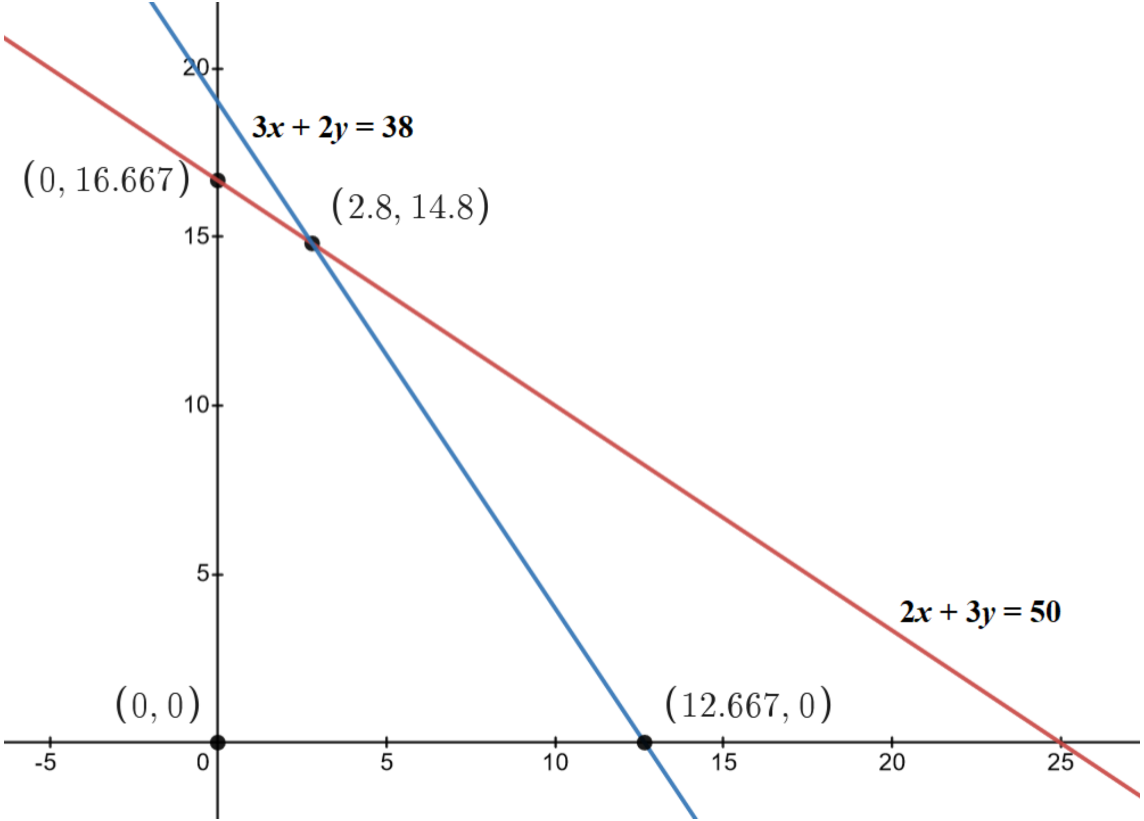
sujeto a:

$$2x + 3y \leq 50 \text{ (cap. máq. } A\text{)}$$

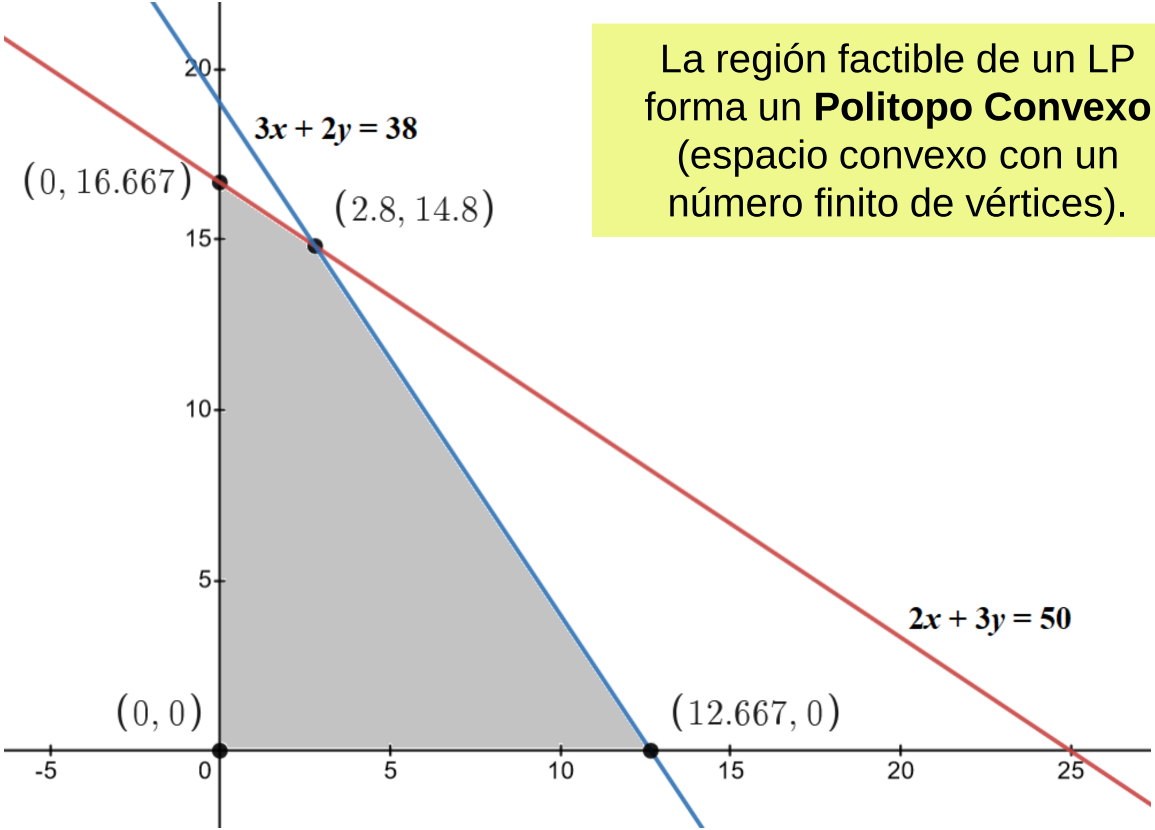
$$3x + 2y \leq 38 \text{ (cap. máq. } B\text{)}$$

$$x, y \geq 0$$

Ejemplo LP: Resolución Método Gráfico

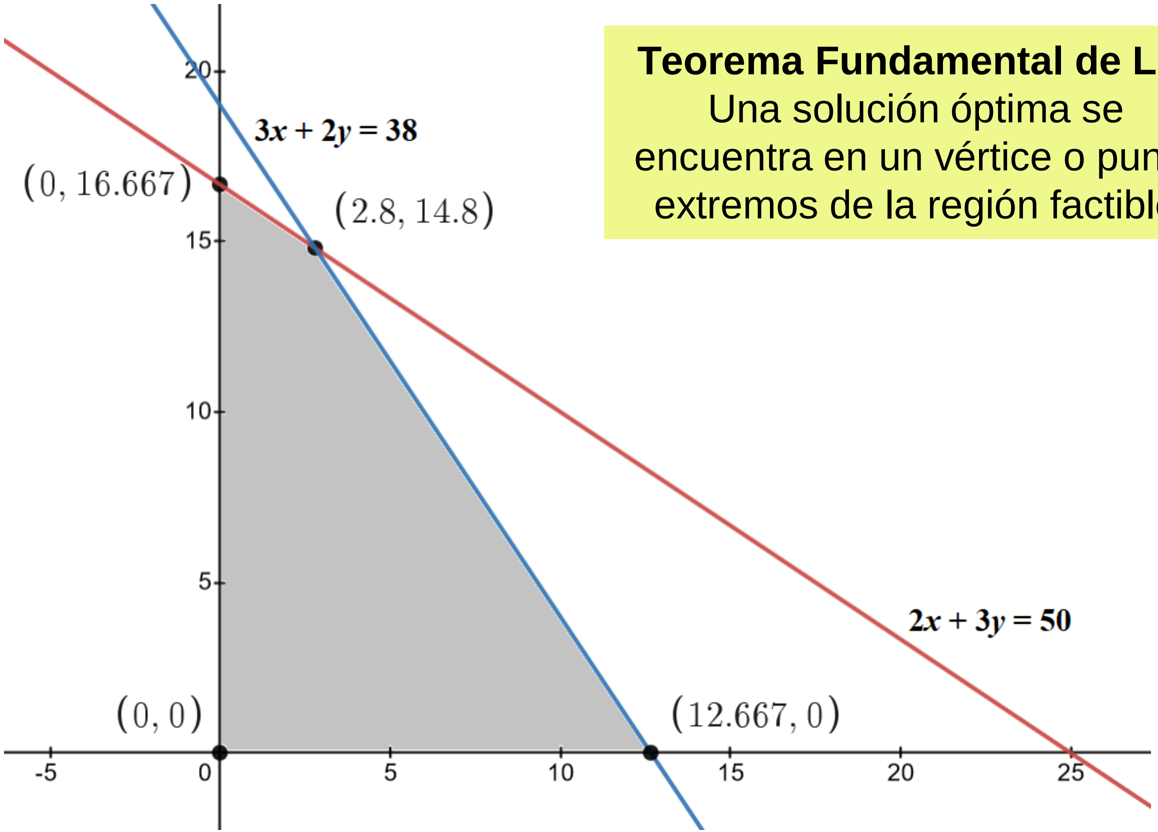


Ejemplo LP: Resolución Método Gráfico



La región factible de un LP forma un **Politopo Convexo** (espacio convexo con un número finito de vértices).

Ejemplo LP: Resolución Método Gráfico



Teorema Fundamental de LP: Una solución óptima se encuentra en un vértice o punto extremos de la región factible

Ejemplo LP: Método Simplex

- Es el método clásico, y uno de los más utilizados en la práctica, para la resolución de problemas LP.
- Requiere que el problema de LP esté formulado en la **forma estándar** (objetivo de minimización, restricciones de igualdad y variables no negativas).
- Parte de un vértice de la región factible (**solución básica**) y se va moviendo a vértices adyacentes, de a uno a la vez, y no empeorando el valor objetivo.
- Termina cuando se cumpla la **condición de optimalidad** (la solución actual es la óptima) o no exista solución óptima (problema no acotado).

Ejemplo LP: Resolución Método Simplex

$$\text{Min} - 65x - 70y$$

sujeto a:

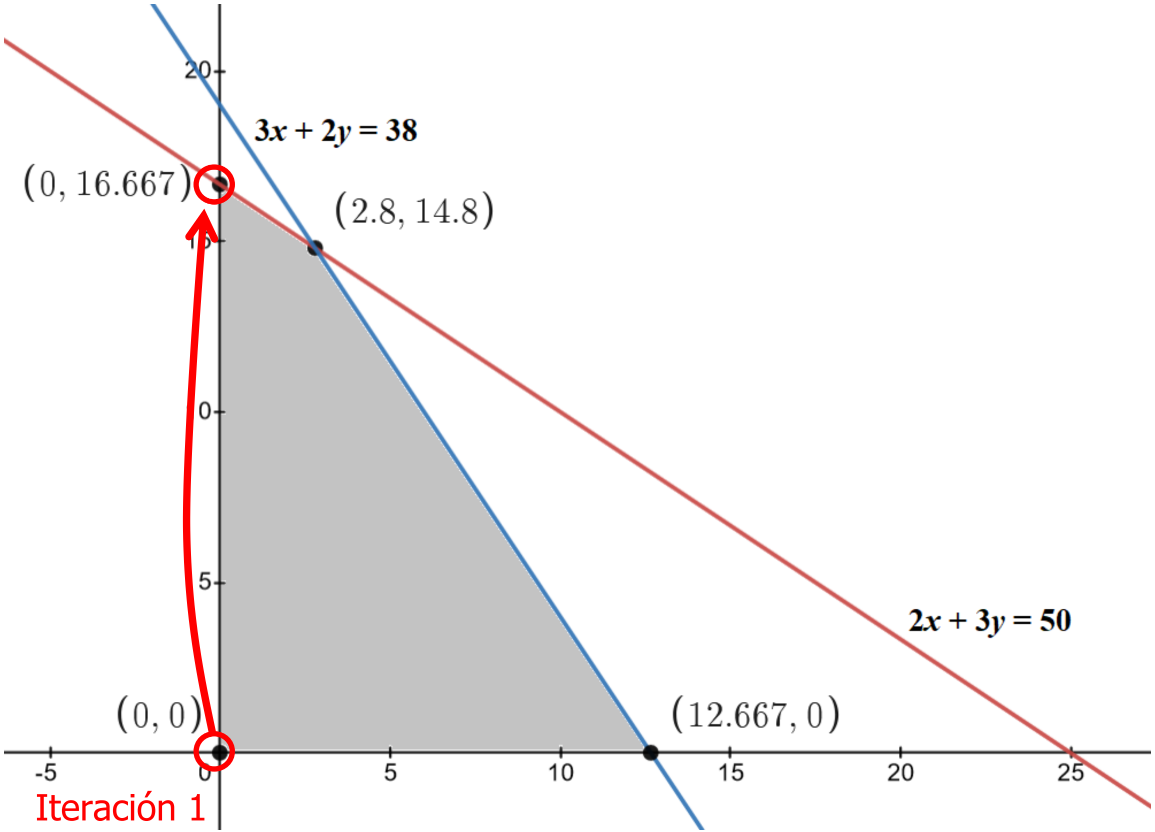
$$2x + 3y + \boldsymbol{s_1} \qquad = 50$$

$$3x + 2y \qquad + \boldsymbol{s_2} = 38$$

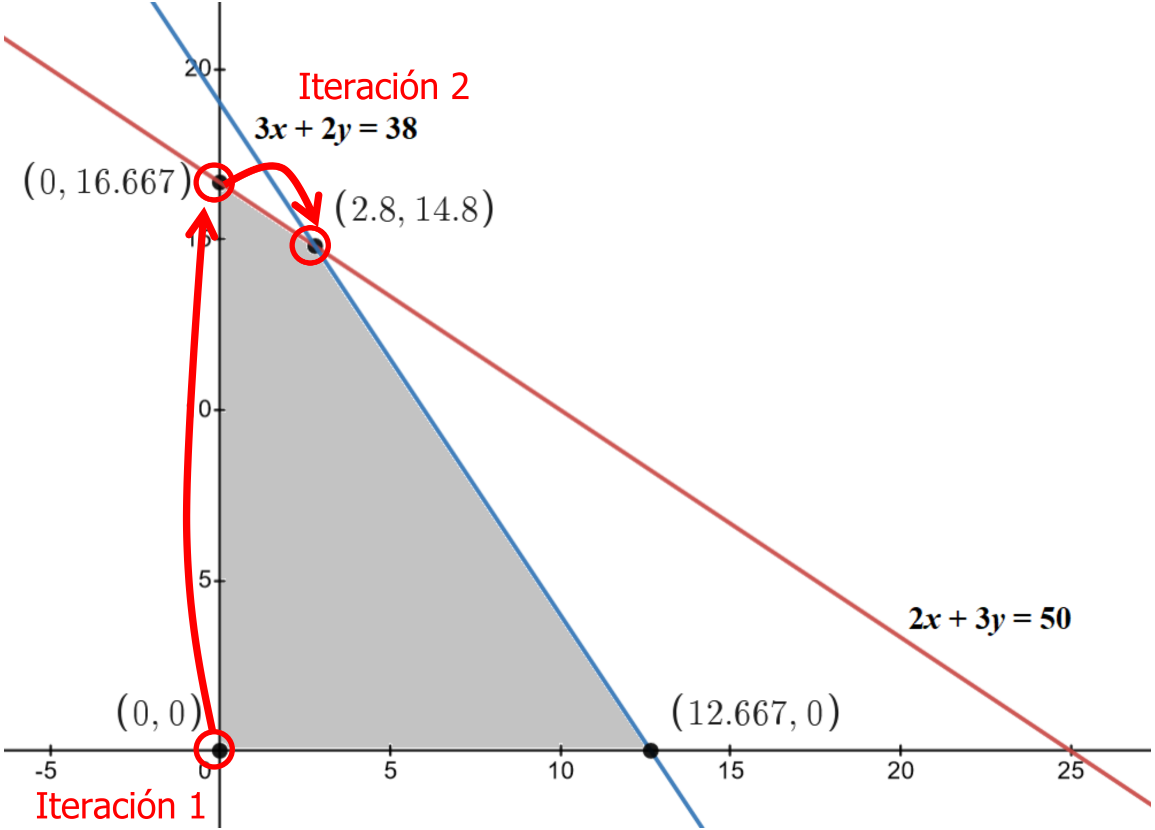
$$x, y, s_1, s_2 \geq 0$$

- LP equivalente al anterior con variables de holgura $\boldsymbol{s_1}$ y $\boldsymbol{s_2}$.

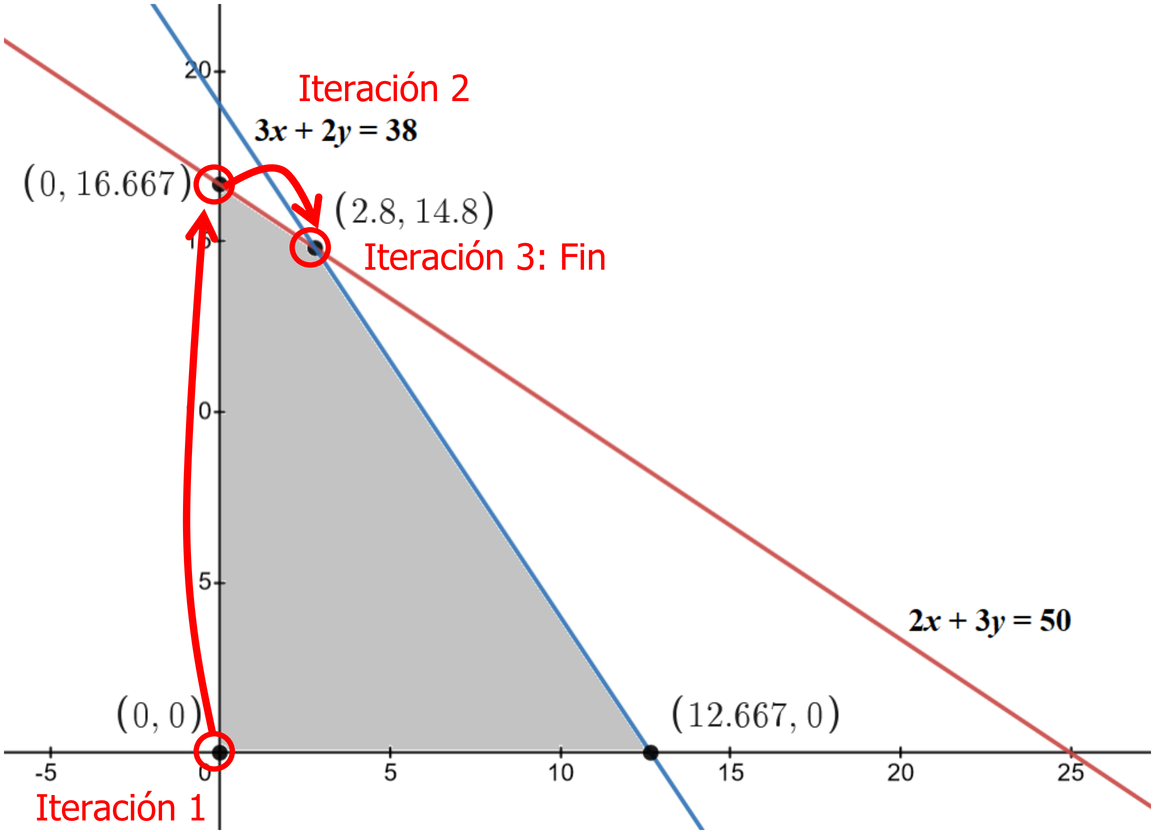
Ejemplo LP: Resolución Método Simplex



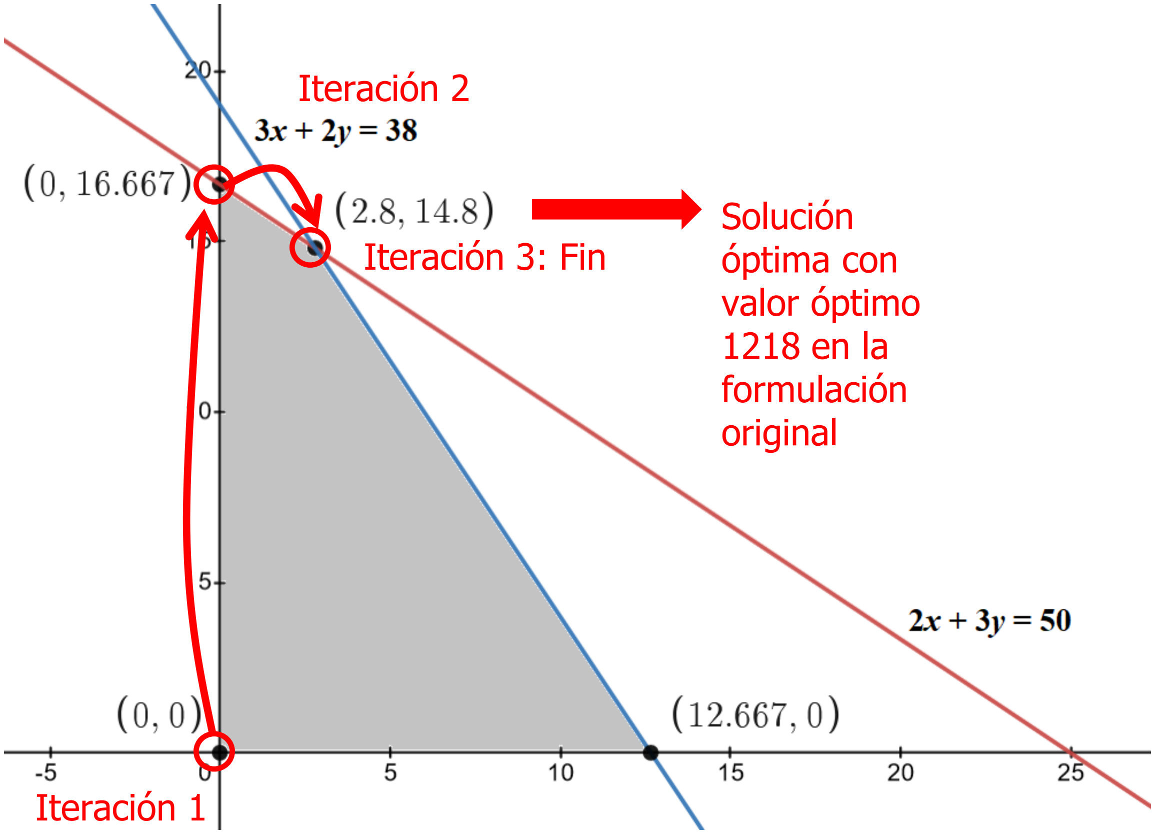
Ejemplo LP: Resolución Método Simplex



Ejemplo LP: Resolución Método Simplex



Ejemplo LP: Resolución Método Simplex



LP: Análisis de Sensibilidad y Dualidad

- Analizar el impacto de cambios (pequeños) en los valores de los parámetros sobre la solución óptima del modelo.
- Al problema LP original (P) se le denomina Primal. El problema Dual (D) de un Primal también es un LP. El dual de (D) es (P).
- Propiedad de Dualidad Fuerte: **El valor óptimo del Primal y del Dual son iguales.**
- La Teoría de Dualidad en LP permite analizar el impacto en la función objetivo de cambios marginales en los valores del lado derecho de las restricciones (RHS).
- La magnitud de los cambios marginales en los RHS sobre la función objetivo se conocen como **precios sombra** o duales de la restricciones.

Parte 3

El problema del “poeta-silvicultor”

Un poeta adquirió 90 ha de bosques para aumentar sus ingresos económicos. Para ello ha decidido destinar a lo sumo 40 ha para el pino rojo y 50 ha para diferentes árboles de madera dura. En base a su conocimiento, sabe que tiene que dedicar 2 d/ha al mantenimiento del pino rojo y 3 d/ha para el de madura dura. Para poder dedicarse a la escritura de sus poesías, no quiere destinar más de 180 días al año al cuidado de sus bosques. Las ganancias anuales por la venta de una ha de pino rojo son de U$S 90, y por una ha de madera dura de U$S 120. Ayudar al poeta a determinar que cantidad del terreno (ha) debe destinar a cada uno de los dos tipos de bosque, para maximizar sus ingresos.

Extraído de: J. Buongiorno, J. Keith Gilless, "*Decision Methods for Forest Resource Management*", Academic Press, 2003, Chapter 2.

Extensión al problema del “poeta-silvicultor”

El poeta quiere saber si le conviene incluir un bosque de eucaliptus en su terreno. Luego de una minuciosa investigación, el poeta ha concluido que para el cuidado de este tipo de bosque debería destinar 1 d/ha por año, y que la ganancia anual sería de U$S 70 por ha. Para mantener diversidad en su terreno, quiere destinar al menos 20 ha a cada uno de los tres tipos de bosque.

Ayudar al poeta a determinar que cantidades de terreno debe destinar a cada uni de los tres tipos de bosque para maximizar sus ingresos, respetando el criterio de diversidad y la cantidad total de ha del terreno.

Sin resolver nuevamente el modelo: ¿le conviene al poeta destinar más ha del terreno para el pino rojo? ¿le conviene arrendar 1 ha adicional a un valor de U$S 500 por año, para destinar a alguno de los tres tipos de bosque?