Matemática 1
Examen

CURE

6 Diciembre de 2024

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deber utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.

Problema 1 [35 pts.]

Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y los parámetros a,$b \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-cos(\pi x)}{x-1} & \text{si} \quad x < -1 \\ (a+1)x - b & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ sen(\frac{\pi}{2}x) + x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

(a) [10 pts.] Determine para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$, f es continua. Fundamente detalladamente su resultado.

(b) [10 pts.] ¿Es f derivable en todo $\mathbb{R}$?. Fundamente su respuesta.

(c) [15 pts.] Estudie acotación de f en $\mathbb{R}$. Halle máximo y mínimo de f, $\forall\, x \in [2, 4]$. Estos máximos y mínimos, ¿son locales o globales de f?. Fundamente su respuesta.

Problema 2 [30 pts.]

Considere la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por la recurrencia:
$a_{n+1} = \sqrt[3]{3a_n - 2}$ con $a_0 = -1$

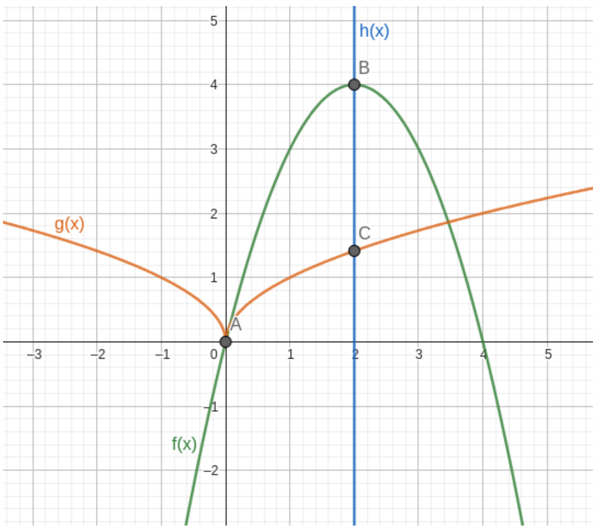
(a) [10 pts.] Pruebe que $a_n \geq -2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(b) [10 pts.] Pruebe que (a_n) es monótona decreciente.

(c) [10 pts.] ¿Es (a_n) convergente? Justifique y en caso de convergencia calcule su límite.

Problema 3 [35 pts.]

(a) [20 pts.] Hallar el área encerrada(A,B,C) entre la recta h, el gráfico de la función f y el gráfico de lala función $g : g(x) = \sqrt{|x|}$.



(b) [15 pts.]

1.
$$\int_0^{\pi/4} t^2 sen(2t)dt$$

2.
$$\int cos(t)^2 dt$$

Solución

Problema 1

(a) Para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$, hay que analizar en cada intervalo si las funciones son continuas y luego en los puntos $x = -1$ y $x = 1$. Las funciones dentro de cada intervalo son continuas. Luego usando usando la definición de limite en un punto, en $x = -1$ se tiene que cumplir,

$$lim_{x\to -1^-}\frac{1-cos(\pi x)}{x-1} = lim_{x\to -1^+}(a+1)x - b = f(-1) \tag{1}$$

para $x = 1$

$$lim_{x\to 1^-}(a+1)x - b = lim_{x\to 1^+}sen(\frac{\pi x}{2}) + x^2 = f(1) \tag{2}$$

Para que se cumplan estan condiciones, $a = 1/2$ y $b = -1/2$. Por lo tanto, $f(x) = \frac{3x}{2} + \frac{1}{2}$ si $-1 \leq x \leq 1$

(b) No, basta con observar que la función no es derivable en $x = -1$.

$$lim_{x\to -1^-} = \frac{\frac{1-cos(\pi x)}{x-1} - 1}{x+1} \neq lim_{x\to -1^+}\frac{\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}}{x+1} \tag{3}$$

(c) Para estudiar la acotación, se calcular:

$$lim_{x\to -\infty}\frac{1-cos(\pi x)}{x-1} = 0 \tag{4}$$

y además sabiendo que la función es continua, $f(-1) = -1$. Por lo tanto el mínimo global de la $f(x)$, es -1 y se da en $x = -1$. Luego en los restantes intervalos las funciones son crecientes, entonces solo resta calcular el limite:

$$lim_{x\to +\infty}sen(\frac{\pi x}{2}) + x^2 = +\infty \tag{5}$$

por lo tanto máximo global no hay.
En el intervalo $[-1, \infty]$, $f(x)$ es creciente, por lo tanto el máximo de $f(x) \in [2, 4]$ es $f(4)$ y el mínimo es $f(2)$. Ambos son máximos y mínimos locales del segmento $[2, 4]$.

Problema 2

(a) Por inducción completa en los naturales:

- **Caso base:(n=0)** $a_0 \geq -2$

- **Hipótesis inductiva:(n=h)** $a_h \geq -2$

- **Tesis inductiva:(n=h+1)** $a_{h+1} \geq -2$

Tomando $a_{h+1} = \sqrt[3]{3a_h - 2} \geq -2 \Rightarrow 3\mathrm{a}_h - 2 \geq -8 \Rightarrow \mathrm{a}_h \geq -2$

(b) Por parte anterior tenemos que la sucesión es acotada inferiormente. Estudiamos monotonía: Tenemos que $a_n - a_{n+1} = a_n - \sqrt[3]{3a_n - 2}$.
Estudiamos el signo de esa diferencia, obteniendo que $a_n - a_{n+1} = 0$ si $a_n = -2$ o $a_n = 1$, y $a_n - a_{n+1} > 0$ para todo $a_n > -2$ y $a_n \neq 1$
Si $a_0 = -2$, $a_n = -2$ $\forall$ n.(converge a -2)
Si $a_0 = 1$, $a_n = 1$ $\forall$ n.(converge a 1)
Si $a_0 \neq -2$ y $a_0 \neq 1$ la sucesión (a_n) es estrictamente decreciente

(c) Como la sucesión es acotada inferiormente y decreciente, tiene límite: $k = \lim a_n = \lim a_{n+1}$.
$\lim a_{n+1} = \lim \sqrt[3]{3a_n - 2} = \sqrt[3]{3k - 2}$ y $\lim a_{n+1} = k$, entonces $\sqrt[3]{3k - 2} = k$.
Resolviendo la ecuación obtenemos los valores de k, conjunto solución $\{-2, 1\}$
En conclusión si $-2 \leq a_0 < 1$, $\lim a_n = -2$. Si $a_0 \geq 1$, $\lim a_n = 1$ (tener en cuenta que la sucesión es no creciente)

Problema 3

(a) La integral a resolver es: $\int_{x=0}^{x=2} -x(x-4) - \sqrt{x}\ dx = 3.44$

(b)

- $\int t^2 sen(2t)dt = \frac{2xsen(2x) + (1-2x^2)cos(2x)}{4} + k$
  Evaluando la primitiva en el intervalor $[0, \pi/4]$, da $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$

- $\int cos(t)^2 dt = \frac{cos(x)sen(x) + x}{2} + C$