Matemática 1
Examen

CURE

29 Julio de 2024

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deber utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.

Problema 1 [35 pts.]

Sea la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y el parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$

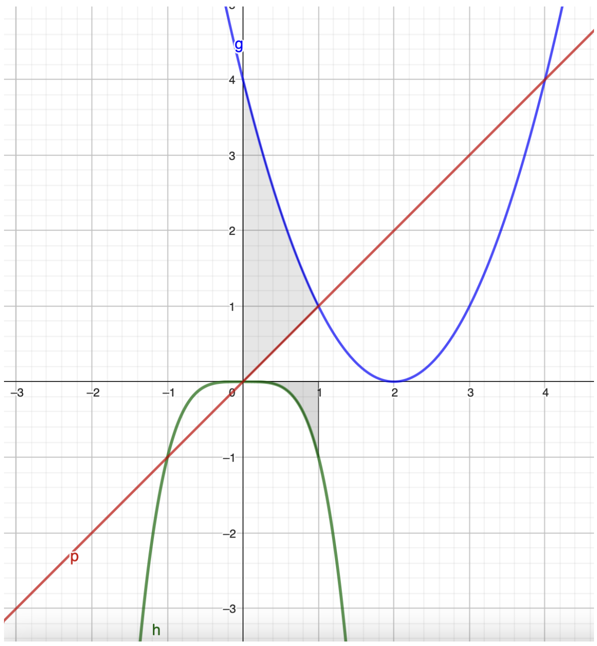
$$g(x) = \begin{cases} e^{x-1}(x^2+2x) & \text{si} \quad x < 1 \\ 3 - ln(\alpha x^2 - 1) & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

(a) [15 pts.] Determine para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, g es continua. Fundamente detalladamente su resultado.

(b) [15 pts.] Halle, en caso de existencia, extremos relativos y absolutos de g en $\mathbb{R}$, halle el conjunto $Im(g)$. Fundamente detalladamente sus resultados.

Problema 2 [30 pts.]

(a) [30 pts.] Calcular el área sombreada de la figura. Se sabe que la función $h(x)$ es un polinomio y ádemas cuenta con cuatro ceros iguales.



Problema 3 [35 pts.]

(a) [10 pts.] Una pelota se tira desde una altura de un metro y medio comienza a rebotar. Cada vez que rebota, la pelota alcanza los $3/5$ de la altura máxima que había alcanzado antes de la caída anterior. Calcular la distancia vertical recorrida por la pelota. Fundamente su respuesta.

(b) [20 pts.] Asisten n personas a un evento. El evento al principio esta vació(no hay personas), las personas van llegando de a una. Cada persona que llega saluda con el puño a las personas que ya están en el evento. ¿Cuántos saludos de puños se han efectuado en el evento al que asistieron n personas?.
Si al evento asisten 6 personas: ¿Cuántos saludos se dieron?
Ahora suponer que las personas se dan 2 saludos de puños, en vez de uno. ¿Cuántos saludos de puños se dieron en total en un evento al que asisten 5 personas? Fundamente su respuesta.

Solución

Problema 1

(a) Para que la función sea continua en $x = 1$, se plantean lo limites laterales, con la condición que el resultado sea el mismo. Además debe cumplir que la imagen de $g(x)$ en $x = 1$ sea igual al valor de los limites. El valor es $\alpha = 2$

(b)

- **Para** $x < 1$

$$lim_{x\to-\infty}e^{x-1}(x^2 + 2x) = 0$$

$$g^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm \frac{\sqrt{8}}{2}$$

  siendo $-2 - \frac{\sqrt{8}}{2}$ mínimo relativo y máximo relativo $-2 + \frac{\sqrt{8}}{2}$.

- **Para** $x \geq 1$
  $g(1) = 3$ y el $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

Por lo tanto el máximo absoluto de la función lo alcanza en $x = 1$, tiene máximo y mínimo relativos en $x = -2 \pm \frac{\sqrt{8}}{2}$.
El conjunto de imagen es $Im(g) = (-\infty, 3]$

Problema 2

(a) La función $h(x) = x^4$, $g(x) = (x - 2)^2$ y por último $p(x) = x$. Igualando la función $p(x)$ a las demás se puede hallar los puntos de intersección, los que se utilizaran como limites en las integrales. Se calcular la integral de: $\int_0^1 -x^4dx = -0.2$ para el área de abajo, y se calcula, $\int_0^1 (x - 2)^2 - xdx = 1.83$. Como $h(x)$ es definida negativa entonces el área total(área superior e inferior) es: 1.83 + 0.2 .

Problema 3

(a) La pelota se tira de 1.5 m de altura y con cada rebote con el piso, disminuye en un 40 % si trayectoria vertical.
Primero a $1.5m$, con 1 rebote $1.5(\frac{3}{5})m$ pero el recorrido de este es el doble de la altura del rebote, con 2 rebotes $1.5(\frac{3}{5})^2m$ y así sucesivamente. Generalizando para n rebotes, el recorrido seria: $1.5 + 2\sum_{n\geq0} 1.5(\frac{3}{5})^n = 1.5 + 3\sum_{n\geq0}(\frac{3}{5})^n$.
La suma de esta serie representa la distancia recorrida por la pelota, luego de

una sucesiva cantidad de rebotes.
Usando que la serie geométrica $\sum_{n\geq 0} r^n$ su suma converge a $\frac{1}{1-r}$ si $|r| < 1$. Como $|r| = |\frac{3}{5}| < 1$, entonces la serie converge a 2.5 y la distancia recorrida por la pelota es $(1.5 + 3 * 2.5)m = 9m$.

(b) Sea a_n el total de saludos de puños con n personas en el evento. Defino $a_0 = 0$ no se realizaron saludos ya que no asistió nadie aun al evento.
$a_1 = 0$ la primer persona que llega no saluda a nadie dado que es la primera.
Dado una persona m con $m < n$ que asiste al evento, al momento que m entra al evento van a_{m-1} saludos en total y m además tiene que saludar a los que están en el evento, que son $m - 1$. Esto se puede generalizar y obtenemos una sucesión definida por recurrencia $a_n = a_{n-1} + (n - 1)$
Si $n = 6$ entonces $a_6 = 15$.
Si se dan 2 saludos, la dinámica del problema es la misma solo que hay 2 veces la cantidad de saludos. Resultado sería: $2a_5 = 20$