Cálculo diferencial e intelgral en una variable, segundo semestre 2024

Departamento de Matemática y Aplicaciones;
Cure–Universidad de la República

Tercer Parcial

`Los ejercicios valen cada uno de ellos dos puntos salvo el 2 y el 5 que valen tres puntos`

Ejercicio 1

Probar que $(\log x^2)' = \dfrac{2}{x}$ de dos maneras $(x > 0)$:

i) Usando la regla de la cadena;

ii) Usando la fórmula $\log(a^b) = b \log a$ con $(a, b > 0)$.

`Solución`(i) $(\log x^2)' = \dfrac{1}{x^2}(x^2)' = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x}$.

`Solución`(ii) $\log x^2 = 2\log x$ luego $(\log x^2)' = (2\log x)' = 2(\log x)' = \dfrac{2}{x}$

Ejercicio 2

Recordar que la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ está dada por la fórmula

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Usar la fórmula anterior para probar que la tangente a la curva $y = \log x$ en el punto $(e, 1)$ es la recta $y = \dfrac{x}{e}$.

`Solución` $f(x) = \log x, a = e, f(a) = \log e = 1. f'(x) = 1/x, f'(e) = 1/e$. Sustituyendo en la fórmula tenemos:

$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) = \frac{x}{e}$$

Ejercicio 3

i) Probar que para cualquier función G se tiene que $G(ax)' = aG'(ax)$ Concluir que si F es una integral de f, entonces $\dfrac{F(ax)}{a}$ es una integral de $f(ax)$.

ii) Escribir una integral de $\cos(2x)$.

`Solución`(i) $G(ax)' = aG'(ax)$ es la regla de la cadena. Luego

$$\left(\frac{F(ax)}{a}\right)' = \frac{(F(ax))'}{a} = \frac{aF'(ax)}{a} = F'(ax) = f(ax).$$

(ii) Tomando $f(x) = \cos x$ tenemos como integral de f la función $\operatorname{sen}(x)$. Luego por lo anterior una integral de $f(2x) = \cos(2x)$ es $\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{2}$.

Ejercicio 4

Calcular las áreas debajo de las siguientes funciones.

i) La función $y = x^4$ en el intervalo $[1, 2]$,

ii) La función $y = \operatorname{sen} x + 3x^2$ en el intervalo $[0, \pi]$.

`Solución`(i)Una integral de x^4 es $x^5/5$ luego el área es $2^5/5 - 1^5/5 = 32/5 - 1/5 = 31/5$.

ii Una integral de la función es $-\cos x + x^3$ luego el área es $(-\cos \pi + \pi^3) - (-\cos 0 + 0^3) = 1 + \pi^3 + 1 = \pi^3 + 2$.

Ejercicio 5

Se considera la función $y = x$ en el intervalo $[0, 1]$. Calcular la $\int_0^1 x dx$ y el área del triángulo de vértices $A = (0, 0), B = (1, 0), C = (1, 1)$ y verificar la igualdad. Se toma la suma inferior correspondiente a $f(x) = x$ en el intervalo $[0, 1]$ para la partición $0 < 1/3 < 2/3 < 1$ que llamamos s. Cual es la relación entre s y $\int_0^1 x dx$.

`Solución` $\int_0^1 x dx = (x^2/2)(1) - (x^2/2)(0) = 1/2$. El triángulo (dibujarlo) tiene base 1 y altura 1 luego el área es $1.1/2 = 1/2$. Haciendo el gráfico se observa que la suma inferior es: $s = 0.1/3 + 1/3.1/3 + 2/3.1/3 = 1/9 + 2/9 = 3/9 = 1/3$. Como debe ser la suma inferior s es menor que la integral $\int_0^1 x dx$ pues $1/3 < 1/2$.