Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal 2**
Facultad de Ingeniería - IMERL

Complemento de diagonalización

Este material complementa el capítulo 2 del libro rojo y tiene por objetivo probar condiciones necesarias y suficientes para que una transformación lineal sea diagonalizable. Comenzaremos por recordar el siguiente resultado del libro rojo:

Teorema Un conjunto compuesto por vectores propios asociados a distintos valores propios es L.I.

Corolario La suma de los subespacios propios es directa.

Demostración. Sea v en $S_{\lambda_1} + \ldots + S_{\lambda_r}$, es decir,

$$v = v_1 + \ldots + v_r,$$

con v_i en S_{λ_i}. Veamos que los v_i son únicos por lo cual la suma de los subespacios es directa. En efecto, si

$$v = v_1 + \ldots + v_r = \widetilde{v}_1 + \ldots + \widetilde{v}_r,$$

tenemos que

$$(v_1 - \widetilde{v}_1) + \ldots + (v_r - \widetilde{v}_r) = \mathbf{o}.$$

como $v_i - \widetilde{v}_i \in S_{\lambda_i}$ por el Teorema 53 tenemos que $v_i - \widetilde{v}_i = \mathbf{o}$ para todo $i = 1, \ldots, r$, es decir, $v_i = \widetilde{v}_i$ para todo $i = 1, \ldots, r$, lo que termina la prueba. $\square$

Corolario Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ los valores propios distintos de T.
Equivalen:

1. T es diagonalizable.
2. $V = S_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus S_{\lambda_r}$.
3. $n = dim(S_{\lambda_1}) + \ldots + dim(S_{\lambda_r})$.

Demostración. (1. $\Rightarrow$ 3.) Sabemos que si T es diagonalizable existe $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de vectores propios.

Supongamos los primeros n_1 vectores de la base asociados al valor propio λ_1, los siguientes n_2 vectores propios de la base asociados al valor propio λ_2, y los últimos

n_r vectores propios de la base asociados al valor propio λ_r, luego,

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & \lambda_r & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Observar que $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$ y que $\dim(S_{\lambda_i}) \geq n_i$.

Tenemos que

$$n \geq dim(S_{\lambda_1} + \ldots + S_{\lambda_r}) = dim(S_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus S_{\lambda_r}) =$$

$$= dim(S_{\lambda_1}) + \ldots + dim(S_{\lambda_r}) \geq n_1 + \ldots + n_r = n,$$

por lo cual $dim(S_{\lambda_1}) + \ldots + dim(S_{\lambda_r}) = n$.
(3. $\Rightarrow$ 2.) Tenemos que

$$dim(S_{\lambda_1} + \ldots + S_{\lambda_r}) = dim(S_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus S_{\lambda_r}) = dim(S_{\lambda_1}) + \ldots + dim(S_{\lambda_r}) = n,$$

luego, $S_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus S_{\lambda_r} \subset V$ y poseen igual dimensión, por lo cual $S_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus S_{\lambda_r} = V$.
(2. $\Rightarrow$ 1.) Sea $\mathcal{B}_i$ una base del subespacio propio S_{λ_i} con $i = 1, \ldots, r$. Luego, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_r$ es una base de de vectores propios lo que prueba que T es diagonalizable.

$\square$

Definición Llamamos *multiplicidad algebraica* de un valor propio λ y escribimos $ma(\lambda)$ a la multiplicidad de λ como raíz del polinomio χ_T. Llamamos *multiplicidad geométrica* de un valor propio λ y escribimos $mg(\lambda)$ a la dimensión del subespacio S_λ.

Proposición Si λ es un valor propio de T se cumple que

$$1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda) \leq n.$$

Demostración. Es claro que $1 \leq mg(\lambda)$ y $ma(\lambda) \leq n$. Probemos que $mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$. Sea $m = mg(\lambda)$, consideremos $\{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de S_λ que completaremos a una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ de V. Consideremos la matriz

$$A = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda I_m & X \\ \mathbf{0} & Y \end{pmatrix},$$

con X e Y matrices de tamaño $m \times (n-m)$ y $(n-m) \times (n-m)$ respectivamente. Luego,

$$A - xI_n = \begin{pmatrix} (\lambda - x)I_m & X \\ \mathbf{0} & Y - xI_{n-m} \end{pmatrix},$$

por lo cual $\chi_T(x) = det(A - xI_n) = det((\lambda - x)I_m) \cdot det(Y - xI_{m-n}) = (\lambda - x)^m p(x)$ de donde se deduce que $m \leq ma(\lambda)$. $\square$

Corolario T diagonalizable si, y sólo si, toda raíz de χ_T se encuentra en $\mathbb{K}$ y verifica que $mg(\lambda) = ma(\lambda)$.

Demostración. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ los valores propios distintos de T, sabemos que $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\} \subset \{\alpha : \alpha \text{ raíz de } \chi_T\}$.
En general se tiene la siguiente desigualdad

$$\sum_{i=1}^{r} dim(S_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^{r} mg(\lambda_i) \leq \sum_{i=1}^{r} ma(\lambda_i) \leq \sum_{\lambda \text{ raíz de } \chi_T} ma(\lambda) = n \tag{1}$$

La igualdad en (1) se satisface, si y sólo si, toda raíz de χ_T se encuentra en $\mathbb{K}$ y se verifica que $mg(\lambda) = ma(\lambda)$. $\square$