Índice general

PREFACIO 5
Lecturas complementarias recomendadas 7

Guía para plantear y resolver problemas 9

Capítulo 1. Matriz asociada, cambio de base y semejanza. 13
1. Representación matricial de una transformación lineal 13
2. EJERCICIOS: Matriz asociada. 20
3. Matriz asociada y operaciones con transformaciones 22
4. EJERCICIOS: Operaciones con transformaciones. 24
5. Cambio de bases 25
6. EJERCICIOS: Cambio de bases. 27
7. Transformaciones y matrices semejantes 28
8. EJERCICIOS: Operadores y matrices semejantes. 31

Capítulo 2. Diagonalización 33
1. Valores, Vectores y Subespacios Propios. 33
2. Cálculo de valores y vectores propios 35
3. EJERCICIOS: Valores y vectores propios 39
4. Tranformaciones y Matrices diagonalizables 41
5. Una aplicación: Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales. 49
6. EJERCICIOS: Diagonalización 51
7. Teorema de Gershgorin 55
8. EJERCICIOS: Teorema de Gerschgorin. 57
9. Ejercicios de Evaluación 60

Capítulo 3. FORMA CANÓNICA DE JORDAN 65
1. Subespacios invariantes 65
2. Forma canónica 66

3. EJERCICIOS: Forma canónica de Jordan 71
4. Teorema de Cayley-Hamilton 74

Capítulo 4. Producto interno y norma 79
1. Producto interno 79
2. Norma 81
3. EJERCICIOS: Producto interno. Espacios normados 84
4. Ortogonalidad y ortonormalidad 86
5. EJERCICIOS: Conjuntos ortogonales y ortonormales 90
6. Complemento ortogonal 91
7. EJERCICIOS: Complemento ortogonal 93
8. Proyección ortogonal 95
9. Aplicación : Un acercamiento a las series de Fourier 96
10. EJERCICIOS: Proyección ortogonal 98
11. Aproximación por mínimos cuadrados 100
12. EJERCICIOS: Aproximación por mínimos cuadrados 103
13. Ejercicios de Evaluación 105

Capítulo 5. Transformaciones en Espacios con producto interno 111
1. Adjunta de una transformación 112
2. Transformaciones lineales autoadjuntas 112
3. EJERCICIOS : Transformaciones Lineales Adjuntas 118
4. Transformaciones ortogonales y unitarias 121
5. Matrices ortogonales y unitarias 125
6. Teorema espectral para transformaciones lineales unitarias 129
7. EJERCICIOS: Transformaciones en espacios con producto interno 131
8. EJERCICIOS:Transformaciones lineales en espacios con producto interno. Unitarias. 133

Capítulo 6. Interpretación geométrica en $\mathbb{R}^n$. Afinidades. 139
1. Clasificación de las transformaciones lineales ortogonales en $\mathbb{R}^2$ 139
2. Clasificación de las transformaciones lineales ortogonales en $\mathbb{R}^3$ 141
3. Transformaciones ortogonales y autoadjuntas en $\mathbb{R}^n$ 144
4. Afinidades en $\mathbb{R}^n$ 146
5. Clasificación de las afinidades isométricas en $\mathbb{R}^n$ 151
6. EJERCICIOS: Interpretación geométrica en $\mathbb{R}^n$. 156

Capítulo 7. Formas cuadráticas 159
1. Definición, expresión matricial y ejemplos 159
2. Aplicación del teorema Espectral a las formas cuadráticas 161
3. Expresión canónica de una forma cuadrática 162
4. Estudio del signo de una forma cuadrática 165
5. Formas cuadráticas degeneradas 167
6. Otros métodos de clasificación de formas cuadráticas 168
7. EJERCICIOS: Formas cuadráticas 172

Capítulo 8. Superficies Cuádricas 175
1. Definición, notación matricial y formas reducidas 175
2. Cambio del sistema de coordenadas 176
3. Clasificación de Cuádricas 177
4. Representaciones en el espacio 179
5. Ecuación reducida de Cuádricas con Centro 186
6. Ecuación reducida de Cuádricas sin Centro 188
7. EJERCICIOS: Cuádricas 195

Apéndices 197
Métodos númericos para calcular valores propios 197
Descomposición Polar 204

PREFACIO

Estas Notas continúan naturalmente las del libro Geometría y Álgebra Lineal 1 aparecido en esta misma colección. Son una reelaboración, reordenada, corregida y completada de notas de años anteriores. Por ello en su redacción inicial han participado un gran número de docentes[1] del Instituto de Matemática y Estadística "Prof. Ing. Rafael Laguardia" (I.M.E.R.L.) de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República. Los Responsables de esta edición agradecemos a los compañeros del Instituto que han ido redactando y corrigiendo versiones anteriores de estas Notas.
El texto constituye la base del curso a dictarse en el 2do. Semestre de 2004; por tanto contiene también ejercicios correspondientes a cada sección. Al final de algunos capítulos hay ejercicios que tienen el formato de las pruebas de facultad. Aún así, el libro no sustituye al curso y algunas modificaciones, agregados y supresiones serán realizados durante el semestre.

Si el lector estuviera interesado en abundar sobre algún tema, o en aclarar conceptos que no quedaron suficientemente claros o en redondear sus conocimiento con otros puntos de vista, le recomendamos utilizar los libros que en muy buena cantidad y calidad se ofrecen sobre los mismo tópicos. Algunos de ellos se comentan al final de este Prefacio. Recomendamos con mucho énfasis que el estudiante recurra a ellos por cualquiera de las razones citadas u otras: un buen libro es siempre mejor que la mejor nota de cursos. La principal dificultad al leerlos puede derivar del uso de notaciones diferentes pero esperamos que éstos no sean impedimentos para concretar la lectura: el esfuerzo redituará en una comprensión más profunda.

El Álgebra Lineal constituye hoy una rama básica de la matemática con aplicaciones dentro y fuera de ésta. Se han incluido pocas de estas aplicaciones sobre todo por razones de tiempo. En las Lecturas Complementarias se dan algunas orientaciones

[1]Entre otros, E. Catsigeras, M. Cerminara, J. Diaz, H. Enrich, A. Herrera, J. Piccini, F. Rabin, M. Sambarino, J. Vieitez

para que el lector interesado pueda encontrar otros ejemplos interesantes.

Se ha incluido también una Guía de ayuda, al menos esperamos que así lo sea, para el planteo y resolución de problemas que es uno de los objetivos de todo curso básico. Esta ayuda está basada en la que se encuentra en el libro: " Cálculo Multivariable" de J. Stewart(Ed. Thomson).

El lector notará una diferencia de estilo con el libro de Geometría y Álgebra Lineal 1. Este año las secciones sobre métodos númericos para calcular valores y vectores propios junto con la descomposición polar fueron incluidos como apéndices. Fueron incluidos ejercicios en algunas secciones en las cuales no los había en la versión 2003. Aún continúa como una versión no final.

Roberto Markarian, Nelson Möller.
Responsables de la edición 2004

Lecturas complementarias recomendadas

De cualquiera de los libros que se indican a continuación, hay diversas otras ediciones; en particular en sus lenguas originales:
A.G. KUROSCH: Curso de Álgebra Superior. Mir-Nimusa.

E. LAGES LIMA: Álgebra Linear, IMPA.
Un libro excelente, escrito por un experimentado matemático autor de numerosos textos, cubre un amplio tópico de temas con rigor y profundidad; sigue un orden algo distinto del de nuestras notas. Es ampliamente recomendado para ampliar todos los capítulos de nuestro curso.

P. R. HALMOS: Espacios Vectoriales de dimensión finita, CECSA.
Una obra clásica sobre el tema, realizada por un destacado matemático. Su enfoque sobre la teoría de espacios vectoriales esta pensada para quien desea luego profundizar en el estudio de espacios de dimensión infinita.

E. HERNÁNDEZ: Álgebra y Geometría , Adisson-Wesley.
Este libro cubre todos los temas de nuestro curso incluyendo los capítulos de geometría, en un orden similar. Es escueto en explicaciones y las pruebas a veces resultan oscuras. No contiene aplicaciones.

R. HILL: Álgebra Lineal Elemental con Aplicaciones, Prentice Hall.
Este libro es como su nombre lo indica, tal vez más elemental que los otros, sin embargo es claro, abarca casi todos los temas del curso y sobre todo tiene un número grande de aplicaciones interesantes a la ingeniería y otras disciplinas. Incluye una introducción al Matlab y tiene numerosos ejercicios, incluyendo algunos proyectos para trabajar en computadora.

K. HOFFMANN & R. KUNZE: Álgebra Lineal, Prentice-Hall.
Otro excelente libro es riguroso, aunque en algunas partes aborda temas con mucha generalidad lo cual puede dificultar su comprensión en una lectura inicial.

R. MARKARIAN & N. MÖLLER: Como cuantificar la importancia individual en una estructura de enlaces: Google-PageRank.

Este artículo contiene una explicación sobre el funcionamiento de uno de los componentes del buscador Google. El ordenamiento de los resultados de una búsqueda utiliza técnicas de valores y vectores propios. Para entender dichos resultados son suficientes los conocimientos adquiridos luego del estudio de estas Notas.
Esta disponible en http://premat.fing.edu.uy
Aparecerá en el Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. XI - Núm. 2 - 2004.

G. NAKOS & D. JOYNER: Álgebra Lineal con Aplicaciones, Thomson.
De nivel similar al libro de Hill tiene también un gran número de ejemplos y aplicaciones y algunas notas históricas interesantes. Tal vez su mayor virtud es el gran número de ejemplos para trabajar con computadora. Se incluyen proyectos para trabajar con Matlab, Maple y Mathematica.

G. STRANG: Álgebra lineal y sus aplicaciones, Addison-Wesley.
Este libro tiene un enfoque algo diferente de los otros libros recomendados. Su objeto de estudio son los sistemas lineales y las matrices, los espacios vectoriales y las transformaciones lineales sólo aparecen secundariamente. No obstante tiene un punto de vista interesante y claro que puede ayudar a ver desde otra óptica los problemas analizados en el curso. Cuenta con un gran número de aplicaciones interesantes incluyendo códigos de computadora en Fortran.

Guía para plantear y resolver problemas

En general no existen reglas rígidas y rápidas que aseguren el éxito en la resolución de problemas. Sin embargo, sí se pueden señalar pasos generales para el proceso de resolverlo. Tales pasos se aplican con una buena cuota de sentido común y concentración y se enriquecen con la experiencia.

PASO 1 : Entender el problema

El primer paso es leer el problema y asegurarse de que se entendió totalmente. Si es así debe poder responderse las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la <u>*incógnita o elemento a determinar*</u>?
2. ¿Cuáles son los <u>*datos*</u> (condiciones, elementos y cantidades conocidas) del problema?

PASO 2 : Planteo del problema

Aquí se debe llevar el problema entendido a un formato manejable y debemos tener en cuenta:

1. Para muchos problemas puede resultar útil realizar un <u>*diagrama*</u> (puede ser una representación gráfica u otro tipo de diagrama) indicando las variables conocidas.
2. Es necesario utilizar una <u>*notación adecuada*</u> (nombres adecuados para las variables, por ejemplo t para el tiempo, V para el volumen, etc.) e indicar las cantidades conocidas.

PASO 3 : Plan para resolver el problema

Aquí debemos buscar la conexión entre los datos y la incógnita u objetivo. Si la conexión buscada no se ve a simple vista (sucede a menudo) lo siguiente ayudará a encontrarla:

1. *Intente reconocer algo familiar*: Relacione la situación representada en el problema con sus conocimientos. Identifique el tema y repase las definiciones, teoremas y razonamientos vinculados con el problema específico. Analice la incógnita y trate de recordar algún problema conocido que tenga una incógnita similar.
2. *Trate de reconocer patrones*: Este patrón puede ser geométrico, numérico o algebraico. Si logra ver una regularidad o repetición puede conducirlo a determinar el patrón y probarlo.
3. *Use analogías*: Problemas similares pero más simples que sepa resolver puede indicarle el camino.
4. *Incorpore algo adicional*: Agregar una línea al diagrama o una variable nueva puede hacer ver el problema de otra forma y dejar a la vista la solución.
5. *Tome casos*: En ocasiones es necesario dividir el problema en casos de naturaleza diferentes y darle tratamiento diferentes. En otros casos el resolver un caso particular puede ayudar a resolver el caso general.
6. *Trabaje la incógnita*: A veces es útil transformar la incógnita en otra, de forma tal que sabiendo resolver esta última se tenga resuelta la requerida. En otras situaciones puede ser conveniente suponer resuelto el problema y transformarlo.
7. *Descomponga el problema en subproblemas más sencillos*: A veces, por la complejidad del problema, es necesario su partición en subproblemas más simples. Así resolviendo los subproblemas luego solo queda unirlos para alcanzar el objetivo.
8. *Utilice razonamientos indirectos*: Para ser claros nos referimos a realizar demostraciones por el absurdo (suponiendo que no se cumple lo que se quiere probar se avanza hasta llegar a una contradicción con lo que sabemos es absolutamente verdadero).
9. *Inducción completa*: Para demostrar resultados que involucran un entero positivo las demostraciones por inducción completa son una opción a tener en cuenta. Esta forma de demostrar se puede sintetizar en su formato más simple como: primero se prueba que se cumple para el primer valor del entero

(paso base) y luego se prueba que si se cumple para un entero se cumple para el siguiente (paso inductivo).

10. *Tenga en cuenta y cuidado con el uso de los cuantificadores*: Un "para todo" permite elegir el elemento dentro de los posibles mientras que un "existe" hace que el elemento esté dado y no se puede elegir, etc.

PASO 4 : Mire hacia atrás

Luego de resuelto el problema es útil repasarla desde el principio para **descubrir errores** en su realización y para *simplificar pasos* si es posible.
Compruebe si los resultados númericos (de existir)son coherentes con la información cuantitativa proporcionada en el enunciado. Si el resultado fuera una fórmula o función verificar algún caso sencillo.
Un propósito muy importante de esta mirada atrás es **familiarizarse con el método de solución**, a fin de utilizarlo en futuros problemas. Para lograr esto es muy útil hacerse la siguiente pregunta: *¿Qué debí tener presente para realizar esta solución?*.
Este propósito es el más importante y creo que no es sustituible por conocer la solución a más problemas.

CAPíTULO 1

Matriz asociada, cambio de base y semejanza.

1. Representación matricial de una transformación lineal

Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, $T : V \to W$ una transformación lineal, $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V y $B = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ una base de W.

Los vectores $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ están en W y por lo tanto, cada uno de ellos se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de la base B:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{m1}w_m \\ T(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{m2}w_m \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ T(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots + a_{mn}w_m. \end{aligned}$$

En otras palabras

$$coord_B(Tv_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, coord_B(Tv_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Luego definimos:

Definición 1. *Se llama representación matricial de T en las bases A y B o matriz asociada a T en las bases A y B, a la matriz que representaremos por ${}_B(T)_A$ y cuya i-ésima columna son las coordenadas del vector $T(v_i)$ en la base B.*

Esto es

$$\begin{aligned} {}_B(T)_A &= \Big(\ [coord_B T\,(v_1)\,]\,, \quad [coord_B T\,(v_2)]\,, \quad \ldots, \quad [coord_B T\,(v_n)] \ \Big) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observación 2. *RECORDAR*
La transformación lineal coordenadas es un isomorfismo entre V y $\mathbb{K}^n$.

Ejemplo 3.

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times m}$, podemos considerar la transformación $T_A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ definida por $T_A(x) = Ax$, donde consideramos a $x \in \mathbb{K}^m$ como vector columna. Si E_m y E_n son las bases canónicas de $\mathbb{K}^m$ y $\mathbb{K}^n$ respectivamente entonces

$${}_{E_m}(T_A)_{E_n} = A.$$

VERIFIQUELO!!

Ejemplo 4. *Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que*

$$T\,(x, y) = (4x - 2y, 2x + y, x + y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

y las bases $A = \{(1, 0)\,, (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $B = \{(1, 0, 0)\,, (0, 1, 0)\,, (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Para hallar la matriz asociada a T en dichas bases:
1) Hallamos las imágenes de los vectores de la base A

$$\begin{aligned} T\,(1, 0) &= (4, 2, 1)\,, \\ T\,(0, 1) &= (-2, 1, 1)\,. \end{aligned}$$

2) Calculamos las coordenadas de estos en la base B:

$$\begin{aligned} T(1, 0) &= (4, 2, 1) \\ &= 4(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1) \\ \Rightarrow coord_B(T(1, 0)) &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(0,1) &= (-2,1,1) \\ &= -2(1,0,0)+1(0,1,0)+1(0,0,1) \\ \Rightarrow coord_B(T(0,1)) &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego ${}_B(T)_A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 5. *Consideremos la transformación lineal* $T : P_2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que dado* $p(t) = at^2 + bt + c \ \forall t \in \mathbb{R}$*, se cumple*

$$T(p) = (2a + b, a + b + 4c),$$

y las bases $A = \{p_1, p_2, p_3\}$ *de* P_2 *donde* $p_1(t) = t^2$*,* $p_2(t) = t$*,* $p_3(t) = 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$*; y* $B = \{(1,1), (1,0)\}$ *de* $\mathbb{R}^2$*.*

Para hallar la matriz asociada a T en dichas bases:
1) Hallamos las imágenes de los vectores de la base A

$$\begin{aligned} T(p_1) &= (2,1), \\ T(p_2) &= (1,1), \\ T(p_3) &= (0,4). \end{aligned}$$

2) Calculamos las coordenadas de estos en la base B

$$T(p_1) = (2,1) = 1(1,1) + 1(1,0) \Rightarrow coord_B(Tp_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$T(p_2) = (1,1) = 1(1,1) + 0(1,0) \Rightarrow coord_B(Tp_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$T(p_3) = (0,4) = 4(1,1) - 4(1,0) \Rightarrow coord_B(Tp_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Luego ${}_B(T)_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 6. *Consideremos la transformación lineal* $T : P_2 \to P_2$ *tal que* $T(p) = p'$ *y la base canónica de* P_2 $A = \{p_0, p_1, p_2\}$ *donde* $p_i(t) = t^i, \quad i = 0, 1, 2.$

1) Hallemos las imágenes de los vectores de la base A

$$T(p_0) = 0, T(p_1) = p_0, T(p_2) = 2p_1.$$

2) Calculemos las coordenadas de estos en la base A

$$T(p_0) = 0 = 0p_0 + 0p_1 + 0p_2 \Rightarrow coord_A(Tp_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T(p_1) = p_0 = 1p_0 + 0p_1 + 0p_2 \Rightarrow coord_A(Tp_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T(p_2) = 2p_1 = 0p_0 + 2p_1 + 0p_2 \Rightarrow coord_A(Tp_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego ${}_A(T)_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Observación 7. *Si dim(V)=n y dim(W)=m la matriz asociada tiene dimensión* $m \times n$.

Observación 8. *La matriz* ${}_B(T)_A$ *como recién vimos, queda completamente determinada conocidas la transformación lineal* T *y las bases* A *y* B *del dominio y codominio respectivamente.*

Recíprocamente, dada una matriz M de tamaño $m \times n$ y dos bases A y B de los espacios V y W respectivamente, queda completamente determinada una transformación lineal T tal que ${}_B(T)_A = M$.

En efecto, al conocer la matriz M, sus columnas son las coordenadas en la base B de las imágenes de dos vectores de la base A.
Esto nos permite conocer a las imágenes de los vectores de la base A, y esto es suficiente para determinar T.

Ejemplo 9. *Hallar la transformación lineal $T : R^3 \to \mathbb{R}^2$ sabiendo que*

$$_B(T)_A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donde $A = \{(1,0,1), (2,0,0), (0,1,0)\}$ es base de R^3 y $B = \{(2,-1), (0,2)\}$ es base de R^2.

De acuerdo a la definición de matriz asociada

$$coord_B(T(1,0,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$coord_B(T(2,0,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$coord_B(T(0,1,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$T(1,0,1) = 2(2,-1) + 1(0,2) = (4,0),$$

$$T(2,0,0) = 3(2,-1) + 0(0,2) = (6,-3),$$

$$T(0,1,0) = -1(2,-1) + 2(0,2) = (-2,5).$$

Ahora bien siendo $A = \{(1,0,1), (2,0,0), (0,1,0)\}$ una base de R^3 se cumple que $\forall (x,y,z) \in R^3$ que

$$(x,y,z) = z(1,0,1) + \left(\frac{x-z}{2}\right)(2,0,0) + y(0,1,0).$$

Luego por la linealidad de T

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= z\ T(1,0,1) + \left(\tfrac{x-z}{2}\right)\ T(2,0,0) + y\ T(0,1,0) \\ &= z(4,0) + \ \tfrac{x-z}{2}\ \cdot (6,-3) + y(-2,5) = \left(3x - 2z - 2y, -\tfrac{3}{2}x + 5y + \tfrac{3}{2}z\right). \end{aligned}$$

Así $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es tal que

$$T(x,y,z) = \left(3x - 2z - 2y, -\frac{3}{2}x + 5y + \frac{3}{2}z\right).$$

Teorema 10. *Sean V, W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $B = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ bases ordenadas de V y W respectivamente; y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces se cumple que*

$$coord_B(Tv) = {}_B(T)_A \, coord_A\,(v)\,.$$

<u>Demostración</u>:

Usaremos las siguientes notaciones

$$_B(T)_A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ y } coord_A\,(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Por definición de matriz asociada

$$(I) \quad \begin{array}{l} T\,(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{m1}w_m \\ T\,(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{m2}w_m \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ T\,(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots. + a_{mn}w_m \end{array}$$

y siendo $coord_A\,(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ tenemos que

$$v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$$

Luego aplicando T y usando la linealidad

$$\text{(II) } T\,(v) = x_1 \; T\,(v_1) + x_2 \; T\,(v_2) + \ldots. + x_n \; T\,(v_n)$$

Sustituimos (I) en (II) obteniendo

$$\begin{aligned} T\,(v) \quad &= x_1\,(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots. + a_{m1}w_m) + x_2\,(a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots. + a_{m2}w_m) + \\ &+ \ldots + x_n\,(a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots. + a_{mn}w_m) \\ &= (x_1a_{11} + x_2a_{12} + \ldots. + x_na_{1n})\,w_1 + (x_1a_{21} + x_2a_{22} + \ldots. + x_na_{2n})\,w_2 + \ldots \\ &\ldots. + (x_1a_{m1} + x_2a_{m2} + \ldots. + x_na_{mn})\,w_m. \end{aligned}$$

Luego

$$
\begin{aligned}
coord_B(Tv) &= \begin{pmatrix} x_1a_{11}+x_2a_{12}+\ldots+x_na_{1n} \\ x_1a_{21}+x_2a_{22}+\ldots+x_na_{2n} \\ \vdots \\ x_1a_{m1}+x_2a_{m2}+\ldots+x_na_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= {}_B(T)_A \; coord_A\,(v)\,.
\end{aligned}
$$

□

Observación 11. *El teorema anterior nos dice como trabajar con la matriz asociada. Así podemos resolver problemas de transformaciones lineales con el siguiente procedimiento: "pasamos a coordenadas, resolvemos en coordenadas y luego volvemos a los vectores". Esta propiedad muestra el paralelismo entre matrices y transformaciones lineales: mientras la transformación lineal opera entre los espacios vectoriales la matriz opera entre las coordenadas.*

Ejemplo 12. *Dadas* $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *y las bases* $A=B=\{(1,0,0)\,,(1,1,0)\,,(1,1,1)\}$ *tal que*

$$
{}_B(T)_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},
$$

hallar $T\,(2,0,-1)$.

Como $(2,0,-1)=2\,(1,0,0)+(-1)\,(1,1,0)+1\,(1,1,1)$, resulta que

$$
coord_A\,(2,0,-1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Luego de acuerdo al Teorema 10 se cumple que

$$\begin{aligned} coord_B\,(T(2,0,-1)) &= {}_B(T)_A \;\; coord_A\,(2,0,-1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Así: $T\,(2,0,-1) = 3\,(1,0,0) + 4\,(1,1,0) + (-3)\,(1,1,1) = (4,1,-3)\,.$

---

2. EJERCICIOS: Matriz asociada.

EJERCICIO 1. *Sea* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *tal que* $T(x,y,z) = (3x+2y-4z, x-5y+3z)$. *Hallar* ${}_A(T)_B$ *en los siguientes casos:*

1. B y A son las respectivas bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$
2. $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y A la base canónica $\mathbb{R}^2$
3. $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y $A = \{(1,3),(2,5)\}$

EJERCICIO 2. *Sea* $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *tal que dado* $p(t) = a + bt + ct^2$,

$$T(p) = (2a+3b-8c, a+b+c, 4a-5c, 6b).$$

Hallar ${}_A(T)_B$ *en los siguientes casos:*

1. B *y* A *son las respectivas bases canónicas de* $\mathcal{P}_2$ *y* $\mathbb{R}^4$
2. $B = \{p_0, p_1, p_2\}$ *donde* $p_i(t) = (t-1)^i \;\; \forall\, t \in \mathbb{R}, \;\; (i = 0,1,2)$
   A *es la base canónica de* $\mathbb{R}^4$

EJERCICIO 3. *Sea* $\mathbb{R}^3$ *el espacio vectorial de las componentes de los vectores libres, o visto como los puntos del espacio sensible. Dado* $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^3$ *fijo, con* $||\vec{u}_0|| = 1$*, se define* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que*

$$T(v) = < v, \vec{u}_0 > \vec{u}_0,$$

donde $<,>$ *representa el producto escalar .*

1. Hallar la matriz asociada a T $({}_B(T)_B)$ en una base ortonormal que incluya al vector $\vec{u}_0$
2. Hallar la matriz asociada a T en la base canónica de $\mathbb{R}^3$

EJERCICIO 4. *Sean* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, *la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y las bases

$$\mathcal{B} = \{(1,-1,1),(1,1,1),(1,0,0)\} \text{ y } \mathcal{A} = \{(1,2,0),(2,1,0),(1,1,1)\}.$$

1. ¿ Queda T únicamente determinada por $A = {}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}}$? Justifique su respuesta.
2. En caso afirmativo, hallar $T(x,y,z)$.

EJERCICIO 5. *Dadas las bases* $E = \{p_0, p_1, p_2\}$ *con* $p_i(t) = t^i \ \ \forall\, t \in \mathbb{R} \ \ (i = 0,1,2)$ *y la base* U *es*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\},$$

consideramos $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R})_{3\times 2}$ *lineal tal que*

$${}_{U}(T)_{E} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hallar $T(q_0)$ *siendo* $q_0 : q_0(t) = 4t^2 - 1 \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 6. *Sean* $E = \{p_0, p_1, p_2\}$ *con* $p_i(t) = (t+1)^i \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}, \ \ (i = 0,1,2)$ *y* $U = \{(1,1,0),(1,2,3),(3,2,1)\}$ *bases de* $\mathcal{P}_2$ *y* $\mathbb{R}^3$ *respectivamente. Consideramos* $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *lineal tal que*

$${}_{U}(T)_{E} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dado $q_0 : q_0(t) = t^2 + t - 1 \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$, *hallar* $T(q_0)$.

EJERCICIO 7. *Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas*

1. *Si* $T : V \longrightarrow W$ *es una transformación lineal con* $dim(V) = n$ *y* $dim(W) = m$, *entonces cualquier matriz asociada* T *es* $m \times n$

2. *Si dos transformaciones lineales, definidas en los mismos espacios vectoriales dominio y codominio, tienen la misma matriz asociada, entonces son la misma.*

EJERCICIO 8. *Sea* $T : \mathcal{M}(\mathbb{R})_{2\times 2} \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ *definida por* $T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A$

¿Existen bases en $\mathcal{M}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ tal que la matriz asociada en dichas bases sea $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
? Justifique la respuesta.
Hallar la matriz asociada a T en la base canónica de $\mathcal{M}(\mathbb{R})_{2\times 2}$.

---

3. Matriz asociada y operaciones con transformaciones

Teorema 13. *Sean dos transformaciones lineales* $T : V \to W$ *y* $S : V \to W$. *Sea* $B = \{v_1 , \ldots , v_n\}$ *base de* V *y* $E = \{w_1 , \ldots , w_m\}$ *base de* W.
Entonces:

$$_E(T + S)_B = {}_E(T)_B + {}_E(S)_B.$$

Demostración

Sean $A = (a_{ij}) = {}_E(T)_B$ y $M = (b_{ij}) = {}_E(S)_B$, entonces:

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, w_i \;\; S(v_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\, w_i$$

de donde obtenemos que

$$\begin{aligned} (T + S)(v_j) &= T(v_j) + S(v_j) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, w_i + \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\, w_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} (a_{ij} + b_{ij})\, w_i. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$_E(T + S)_B = (a_{ij} + b_{ij}) = A + M.$$

$\square$

Esto reafirma el paralelismo entre transformaciones lineales y matrices.

Teorema 14. *Sea $T : V \to W$ una transformación lineal y α un escalar de $\mathbb{K}$. Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V y $E = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W. Entonces:*

$$_E(\lambda T)_B = \lambda \; _E(T)_B.$$

Demostración

Si $A = (a_{ij}) = {}_E(T)_B$ entonces: $T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$ de donde obtenemos que :

$$\begin{aligned}(\lambda T)(v_j) &= \lambda T(v_j)\\ &= \lambda \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\\ &= \sum_{i=1}^{m} \lambda a_{ij} w_i.\end{aligned}$$

De la definicioón de matriz asociada, vemos que

$$_E(\lambda T)_B = (\lambda a_{ij}) = \lambda A.$$

□

Este teorema reafirma el paralelismo entre transformaciones lineales y matrices.

Teorema 15 (Matriz asociada a la composición de transformaciones lineales)**.** *Considere los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales U, V y W, con dim(U)=s, dim(V)=n y dim(W)=t, y las transformaciones lineales $S : U \to V$ y $T : V \to W$. Sean $A = \{u_1, \dots, u_s\}$, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $C = \{w_1, \dots, w_t\}$ bases de U, V y W respectivamente. Entonces la matriz asociada a la composición $T \circ S$ es el producto de las matrices asociadas. Es decir*

$$_C(T \circ S)_A = {}_C(T)_B {}_B(S)_A.$$

Demostración

Sea $_C(T)_B = (a_{ij})$, $_B(S)_A = (b_{jk})$ y $_C(T)_B {}_B(S)_A = (c_{ij})$ con
$1 \le i \le t$, $1 \le j \le n$, $1 \le k \le s$.

Por definición de producto de matrices $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$. Calculemos $_C(T \circ S)_A$.

Dado $u_e \in A$, se cumple que

$$\begin{aligned}(T \circ S)(u_e) &= T(S(u_e)) = T\left(\sum_{j=1}^{n} b_{j\,e} v_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} b_{j\,e} T(v_j) = \sum_{j=1}^{n} b_{j\,e} \sum_{i=1}^{t} a_{ij} w_i \\ &= \sum_{i=1}^{t} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} b_{j\,k}\right) w_i \\ &= \sum_{i=1}^{t} c_{i\,k} w_i.\end{aligned}$$

Resulta, por definición de matriz asociada ${}_C(T \circ S)_A = (c_{i\,j})$.

□

Observación 16. *Sea $T : V \to W$ un isomorfismo, $T^{-1} : W \to V$ su inversa, B y B' bases de V y W respectivamente. Como $T \circ T^{-1} = id_W$ se cumple que*

$$_{B'}(T)_B \cdot {}_B(T^{-1})_{B'} = {}_{B'}(id_W)_{B'} = I.$$

También $T \circ T^{-1} = id_V$ por lo que

$$_B(T^{-1})_{B'} \cdot {}_{B'}(T)_B = {}_B(id_V)_B = I.$$

Deducimos que la matriz asociada a la transformación inversa es la inversa de la matriz asociada a la transformación. Es decir si

$$_{B'}(T)_B = A \Rightarrow {}_B(T^{-1})_{B'} = A^{-1}.$$

(observe que $dim(V) = dim(W)$)

---

4. EJERCICIOS: Operaciones con transformaciones.

Ejercicio 9. *Se consideran las siguientes transformaciones lineales:*

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que} \quad T(3,5) = (8,1) \quad T(-2,1) = (-1,-5)$$

$$S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que} \quad S(1,0) = (1,1) \quad S(0,1) = (0,1)$$

y las bases $A = \{(1,2),(1,1)\}$ y $B = \{(1,-1),(1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente

1. *Hallar ${}_B(T+S)_A$ y ${}_B(3T)_A$*
2. *Hallar ${}_B((S+T)^2)_A$*
   Nota: $S^2 = S \circ S$

Ejercicio 10. *Se consideran las siguientes transformaciones lineales:*

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que} \quad T(3,5) = (8,1) \quad T(-2,1) = (-1,-5)$$

$$S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{tal que} \quad S(1,0) = (1,-1,1) \quad S(0,1) = (0,0,1)$$

y las bases $A = \{(1,-1),(0,1)\}$ *y* $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *y* $\mathbb{R}^3$ *respectivamente*

1. *Hallar* ${}_A(T)_A$
2. *Hallar* ${}_B(S)_A$
3. *Hallar* ${}_B(S \circ T)_A$
4. *Verificar la parte anterior hallando* $T(x,y)$, $S(a,b)$, $S \circ T(x,y)$*y luego la matriz asociada de* $S \circ T$ *directamente.*

Ejercicio 11. *Sea* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *una rotación de centro* $\vec{0}$ *y ángulo* α

1. *Hallar la matriz asociada a* T *en la base canónica de* $\mathbb{R}^2$
2. *Hallar la matriz asociada a* T^2 *en la base canónica de* $\mathbb{R}^2$
3. *Deducir fórmulas para cos*(2α) *y sen*(2α)*.*

Ejercicio 12. *Sea* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *tal que*

$${}_A(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $B = \{(1,1),(1,0)\}$ *y* $A = \{(1,2),(2,-1)\}$

Probar que T *es invertible y hallar una matriz asociada a* T^{-1} *indicando las bases correspondientes.*

---

5. Cambio de bases

En esta sección veremos como se relacionan ${}_{B'}(T)_{A'}$ con otra matriz asociada a la misma transformación lineal, ${}_B(T)_A$, donde A y A' son bases de V y B y B' son bases de W.

Sean $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $A' = \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ bases del espacio V e $I : V \to V$ la transformación identidad (esto es $I(v) = v \;\; \forall v \in V$).

Definición 17. *Llamaremos matriz de cambio de la base ("vieja") A a la base ("nueva") A′ a la matriz:*

$$_{A'}(I)_A.$$

El siguiente teorema muestra como la matriz de cambio de base relaciona las coordenadas de un vector en cada una de las bases.

Teorema 18. *Sean A y A' bases del espacio vectorial V. Entonces*

$$\begin{array}{cccccccc} coord_{A'} & (v) = {}_{A'} & (I &)_A & coord_A & (v)\,. \\ \uparrow & A' \nearrow & & \uparrow & A \nearrow & \end{array}$$

Demostración

Por teorema 10

$$coord_{A'}(I(v)) = {}_{A'}(I)_A \, coord_A\,(v)$$

Pero siendo $I\,(v) = v$, se obtiene la tesis.

$\square$

Teorema 19. *Sean V y W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y A, A' bases de V y B, B' bases de W y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces*

$$_{B'}(T)_{A'} = {}_{B'}(I_W)_B \;\; {}_B(T)_A \;\; {}_A(I_V)_{A'}$$

donde $I_V : V \to V$ y $I_W : W \to W$ son las transformaciones lineales identidad en V y W respectivamente.

Demostración:

Aplicando el teorema 15 reiteradamente

$$_{B'}(I_W \circ T \circ I_V)_{A'} = {}_{B'}(T)_{A'} \Rightarrow \quad {}_{B'}(I_W)_B \, {}_B(T \circ I_V)_{A'} \; = {}_{B'}(T)_{A'}$$

Como $I_W \circ T \circ I_V \equiv T$ se tiene:

$$_{B'}(I_W)_B \, {}_B(T)_A \;\; {}_A(I_V)_{A'} = {}_{B'}(T)_{A'}.$$

$\square$

Teorema 20. *Sea V un espacio vectorial sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, A y A' bases de Vy $I : V \to V$ la transformación lineal identidad. Entonces:*

1) $_A(I)_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ *(matriz identidad).*

2) $_{A'}(I)_A$ *es invertible y* $[_{A'}(I)_A]^{-1} = {}_A(I)_{A'}$.

La demostración se deja como ejercicio para el estudiante.

---

6. EJERCICIOS: Cambio de bases.

Ejercicio 13. *En las bases*

$$A = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\} \text{ y } B = \{(1,0,1),(0,1,0),(-1,0,0)\}$$

de $\mathbb{R}^3$. *Hallar:* $coord_A(v)$ *y* $coord_B(v)$ *para todo* $v \in \mathbb{R}^3$.
Dada $I : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *la transformación identidad, hallar* $_A(I)_B$ *y* $_B(I)_A$. *Verificar que:*

$$coord_A(v) = {}_A(I)_B.coord_B(v) \text{ y } coord_B(v) = {}_B(I)_A.coord_A(v).$$

Ejercicio 14. *Dadas las bases de* $\mathcal{P}_2$: $A = \{p_0, p_1, p_2\}$ *donde* $p_i(t) = t^i,\ \forall\ t \in \mathbb{R},\ i = 0,1,2$ *y* $B = \{q_0, q_1, q_2\}$ *donde* $q_0(t) = t^2 - 1,\ q_1(t) = t - 1,\ q_2(t) = 1$.

1. *Hallar:* $coord_A(p)$ *y* $coord_B(p)$ $\forall\, p \in \mathcal{P}_2$.
2. *Sea* $I : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ *la transformación identidad, hallar* $_A(I)_B$ *y* $_B(I)_A$.
3. *Verificar que:*

$$coord_A(p) = {}_A(I)_B.coord_B(p).$$

$$coord_B(p) = {}_B(I)_A.coord_A(p).$$

Ejercicio 15. *Se consideran las bases* $E = \{(1,0),(0,1)\}$ *y* $B = \{(1,1),(-1,1)\}$ *de* $\mathbb{R}^2$

1. *Sea* $I : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *es la transformación identidad, hallar* $_E(I)_B$ *y* $_B(I)_E$.
2. *Sea* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *tal que*

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

encontrar $_B(T)_B$.

Ejercicio 16. *Se consideran las bases* $A = \{(1,2),(0,1)\}$ *y* $B = \{(1,0,1),(0,1,0),(-1,0,0)\}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *y* $\mathbb{R}^3$ *respectivamente*

1. *Sean* $I_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *e* $I_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *las transformaciones identidad y* E_2 *y* E_3 *las bases canónicas de* $\mathbb{R}^2$ *y* $\mathbb{R}^3$ *respectivamente, hallar* ${}_A(I_2)_{E_2}$ *y* ${}_{E_3}(I_3)_B$.
2. *Sea* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *tal que*

$$T(x, y.z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Hallar ${}_A(T)_B$.

Ejercicio 17. *Sea* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *tal que* T *es una simetría axial con respecto a la recta* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\}$. *Hallar la matriz asociada a* T *en las bases canónicas de* $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 18. *Dadas* $A = \{v_1, v_2\}$ *una base cualquiera de* V *y* $B = \{w_1, w_2\}$ *la base de* V *formada por los vectores* $w_1 = 2v_1 + 3v_2$ *y* $w_2 = -v_1 - 2v_2$. *Sea* $T : V \to V$, *lineal tal que*

$${}_A(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hallar ${}_B(T)_A$.

---

7. Transformaciones y matrices semejantes

Definición 21. *Sea* V *un espacio vectorial de dimensión finita (dim*$(V) = n$*) sobre un cuerpo* $\mathbb{K}$. *Llamaremos operador en* V *a toda transformación lineal* $T : V \to V$*; o sea, operador es una transformación lineal de un espacio vectorial en sí mismo.*

Definición 22. *Sean* A *y* $B \in \mathcal{M}(\mathbb{K})_{n\times n}$. *Diremos que* A *y* B *son semejantes cuando existe* $P \in \mathcal{M}(\mathbb{K})_{n\times n}$ *invertible tal que* $B = P^{-1}\, A\, P$.

Ejemplo 23. *Las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

son semejantes.

En efecto, existe $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ cuya inversa es $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ tal que:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifique los resultados!!!

Teorema 24. *Dadas A y $B \in \mathcal{M}(\mathbb{K})_{n\times n}$. Las matrices A y B son semejantes $\Leftrightarrow$ A y B son matrices asociadas a un mismo operador T en V*

Demostración ($\Rightarrow$) Si consideramos la transformación lineal $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ definida por

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

entonces se cumple que $A = {}_E(T)_E$ donde $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{K}^n$.

Por otro lado, si A y B son semejantes, entonce existe $P \in \mathcal{M}(\mathbb{K})_{n\times n}$ invertible tal que $B = P^{-1}\, A\, P$.
Si elejimos la base $U = \{Pe_1, Pe_2, \ldots, Pe_n\}$, entonces se cumple que: $P = {}_E((I))_U$ y

$$P^{-1} = {}_U((I))_E\,.$$

Así

$$B = {}_U(I)_E\,{}_E(T)_E\,{}_E(I)_U,$$

pero por el teorema 10

$${}_U(I)_E\,{}_E(T)_E\,{}_E(I)_U = {}_U(T)_U.$$

Por lo tanto,

$$B = {}_U(T)_U,$$

entonces $A = {}_E(T)_E$ y $B = {}_U(T)_U$ como se quería.

Demostración ($\Leftarrow$)
Supongamos que $B = {}_U(T)_U$ y $A = {}_Q(T)_Q$. Si $B = {}_U(T)_U$, $A = {}_A(T)_A$, tenemos

$${}_B(T)_B = {}_B(I)_A\ \ {}_A(T)_A\ \ {}_A(I)_B.$$

Sea $P = {}_A(I)_B$, entonces $P^{-1} = {}_B(I)_A$.
Hemos probado entonces que $B = P^{-1} A\ P$, es decir A y B son semejantes. □

Teorema 25. *Sean A y B matrices semejantes en $\mathcal{M}(\mathbb{K})_{n\times n}$. Entonces*

$$\begin{array}{l} 1)\, rango\,(A) = rango\,(B) \\ 2)\, traza\,(A) = traza\,(B) \\ 3)\ det\,(A) = det\,(B) \end{array}$$

Demostración

1) Por la proposición anterior, existe un operador lineal en V y bases U y Q en dicho espacio tales que $A = {}_U(T)_U$ y $B = {}_Q(T)_Q$.

Luego

$$\begin{array}{c} rango\,(A) = rango\,({}_U(T)_U) = dim\,(Im\,(T))\,, \\ rango\,(B) = rango\left({}_Q(T)_Q\right) = dim\,(Im\,(T))\,. \end{array}$$

Así $rango\,(A) = rango\,(B)$.

2) Existe $P \in \mathcal{M}(\mathbb{K})_{n\times n}$ invertible tal que $B = P^{-1}\,A\ P$. Recordando que $traza(MN)$=$traza(NM)$); tenemos

$$\begin{array}{rcl} traza\,(B) & = & traza\left(P^{-1}\,A\ P\right) = traza\left(A\ P\ P^{-1}\right) \\ & = & traza\,(A\ I)\ = traza\,(A)\,. \end{array}$$

3) Usamos que $det(MN)$=$det(M).det(N)$ y $det\left(M^{-1}\right) = (det\,(M))^{-1}$ y obtenemos

$$\begin{array}{rcl} det\,(B) & = & det\left(P^{-1}\,A\ P\right) \\ & = & det\left(P^{-1}\right)\,det\,(A)\ det\,(P) \\ & = & det\,(A)\ \ det\left(P^{-1}\right)\ det\,(P) = det\,(A)\,. \end{array}$$

□

Observación 26. *No vale el recíproco de la proposición anterior pues para*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ y\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

se cumple que

$$\begin{array}{l} rango\,(A) = rango\,(B) = 2 \\ traza\,(A) = traza\,(B) = 2 \\ det\,(A) = det\,(B) = 1 \end{array}$$

Sin embargo, no existe P invertible tal que $B = P^{-1}\,A\,P$, o sea A y B no son semejantes. Esto se puede ver observando que A es la matriz asociada al operador Identidad y B es la matriz asociada a operadores que no son la Identidad.

---

8. EJERCICIOS: Operadores y matrices semejantes.

EJERCICIO 19. *Probar que la relación de matrices semejantes es una relación de equivalencia.*

Recordar que una relación, es una relación de equivalencia si verifica las propiedades:

- <u>idéntica</u> (toda matriz es semejante a sí misma),
- <u>reflexiva</u> (si A es semejante a B, entonces B es semejante a A) y
- <u>transitiva</u> (si A es semejante a B y B es semejante a C, entonces A es semejante a C).

EJERCICIO 20. *Dada A y B matrices $n \times n$ semejantes, probar que:*

1. *A^p y B^p son semejantes, $\forall p \in \mathbb{N}$.*
2. *A^t y B^t son semejantes.*
3. *A es invertible $\quad\Leftrightarrow\quad$ B es invertible. Además, A^{-1} y B^{-1} son semejantes.*

EJERCICIO 21. *Probar que las siguientes matrices son dos a dos semejantes:*

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 22. *Dadas $T : R^3 \to R^3$, lineal y B_1 una base de $\mathbb{R}^3$, donde*

$$_{B_1}(T)_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

¿Existe una base B_2 de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$_{B_2}(T)_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & -10 & 11 \end{pmatrix}?$$

Justifique su respuesta.

CAPíTULO 2

Diagonalización

En esta parte del curso buscaremos una representación matricial sencilla de un operador lineal (una transformación lineal de un espacio vectorial en sí mismo). Esto quiere decir que la matriz asociada al operador en alguna base es semejante a una matriz más sencilla. Como primer objetivo sería bueno encontrar alguna base en la cual la matriz asociada al operador sea diagonal; si lo logramos diremos que la transformación lineal es diagonalizable. Si esto no es posible buscaremos estar lo más cerca posible en algun sentido que será explicitado posteriormente.
En esta sección veremos un par de elementos que son fundamentales para este análisis.

1. Valores, Vectores y Subespacios Propios.

Definición 27 (Valor y vector propio)**.** *Sea V un espacio vectorial sobre el conjunto de escalares $\mathbb{K}$ y $T : V \to V$ un operador lineal.*
*Se llama **vector propio** de T, asociado al **valor propio** $\lambda \in \mathbb{K}$*

$$\boxed{\begin{array}{c} \textit{a todo vector } v \neq \vec{0} \\ \textit{tal que } T(v) = \lambda\, v \end{array}}$$

Observación 28.

- El vector nulo se excluye de la definición anterior pues $T(\vec{0}) = \lambda\vec{0} = \vec{0}$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$ y consecuentemente todo escalar resultaría valor propio.
- Dada una transformación lineal, los valores propios son números del cuerpo $\mathbb{K}$, sobre el que está definido el espacio vectorial.
- Si v es vector propio de T asociado al valor propio λ, entonces para cualquier α escalar no nulo, $\alpha\, v$ también lo es, pues:

$$T\,(\alpha\, v) = \alpha\, T\,(\,v) = \alpha\;\lambda\; v = \lambda\;(\alpha\, v)\,.$$

Pruebe que la suma de dos vectores propios no colineales, asociados al mismo valor propio resulta también vector propio asociado al mismo valor propio.

Ejemplos 29.

Ejemplo 30. *Sea* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que T(x,y) = (3x+y,3y+x). Se puede observar que T(1,-1) = (2,-2), o sea T(1,-1) = 2.(1,-1), entonces el vector (1,-1) es un vector propio de T asociado al valor propio 2.*

Ejemplo 31. *Sea S :* $C^1[0,1] \to C^1[0,1]$ *tal que S(f) = f'. Si f es una función tal que f(x) =* e^{5x}*, se cumple que S(f) = 5f, y por ello f es un vector propio de S asociado al valor propio 5.*

Ejemplo 32. *Una rotación en el plano, de centro el origen y ángulo* $\alpha \neq k\pi$ *con k entero, no tiene vectores propios (y por lo tanto tampoco valores propios), pues ningún vector no nulo después de rotado, resulta colineal a si mismo.*

Ejemplo 33. *La proyección T de los vectores del espacio sobre el plano* O_{xy} *tiene vectores propios con valor propio 1 (todos los vectores no nulos del plano* O_{xy}*, pues para ellos* $T(v) = v$*) y vectores propios con valor propio 0 (todos los vectores no nulos colineales al eje* O_z*, pues para ellos* $T(v) = \vec{0} = 0\,v$*).*

Definición 34. *Sea T un operador lineal y* λ *un valor propio de T, definimos el conjunto*

$$\boxed{S_\lambda = \{v \in V \ : \ T(v) = \lambda v\}.}$$

Dicho de otra forma el conjunto S_λ *esta constituido por los vectores propios de T asociados al valor propio* λ *y el vector nulo,* $\vec{0}$*.*

Proposición 35. *En las condiciones anteriores el conjunto* S_λ *es un subespacio vectorial de V y*

$$S_\lambda = N(T - \lambda Id).$$

Demostración:
Basta probar que $S_\lambda = N(T - \lambda Id)$, pues el núcleo de una transformación lineal es un subespacio vectorial. Para esto, observemos que:

$$\begin{array}{rcccl} v \in S_\lambda & \iff & T(v) = \lambda v & \iff & T(v) - \lambda v = \vec{0} \iff \\ T(v) - \lambda Id(v) = \vec{0} & \iff & (T - \lambda Id)(v) = \vec{0} & \iff & v \in N(T - \lambda Id). \end{array}$$

Lo cual prueba la igualdad de ambos conjuntos y concluye la prueba. □

Definición 36 (Subespacio propio)**.** *El subespacio* S_λ *es llamado* ***subespacio propio*** *asociado al valor propio* λ*.*

2. Cálculo de valores y vectores propios

Nuestro objetivo inmediato es determinar un método para calcular valores y vectores propios de un operador. Para esto, nuestro primer paso consiste en hallar una caracterización para las coordenadas de los vectores propios asociados a un cierto valor propio.
En lo que sigue consideraremos, a menos que se especifique lo contrario, espacios vectoriales de dimensión finita.

Proposición 37. *Sea $A = {}_B(T)_B$, la matriz asociada en la base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ a la transformación lineal $T : V \to V$. Entonces v es vector propio de T con valor propio λ si y sólo si las coordenadas de v en la base B son una solución* ***no trivial*** *del sistema:*

$$(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

<u>Demostración:</u>
Sea λ un valor propio de T y v un vector propio asociado a λ. Supongamos que $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = coord_B(v)$ entonces como $v \neq \vec{0}$ se tiene que $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$. Además como $T(v) = \lambda v$ y A es la matriz asociada a T en la base B se tiene que

$$A\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$(A - \lambda I)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es una solución de (1).

Recíprocamente, sea $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ una solución no trivial de (1) entonces

$$(A-\lambda I)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ es equivalente a } A\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Entonces, si $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ se tiene que $T(v) = \lambda v$. Además, como $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es no trivial, resulta que $v \neq \vec{0}$ y por lo tanto es un vector propio asociada al valor propio λ.

□

Corolario 38. *Sean V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, $T : V \to V$ un operador lineal; B una base de V y $A =_B (T)_B$. Entonces λ es valor propio de T si y sólo si $\lambda \in \mathbb{K}$ y* $\det(A - \lambda I) = 0$

<u>Demostración:</u>
Como consecuencia de la proposición anterior, λ es valor propio de T si y solo si $\lambda \in \mathbb{K}$ y

$$(A-\lambda I)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

es un sistema compatible indeterminado. Esto último resulta equivalente a que $\det(A - \lambda I) = 0$.

□

Ejemplo 39.

Sea V espacio vectorial real. Hallar valores propios y vectores propios de la transformación lineal T si se sabe que en cierta base B:

$$A = {}_B(T)_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comencemos calculando los valores propios de T:

$$det\,(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 7) = 0.$$

Cuyas raíces son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 + i\sqrt{3}$ y $\lambda_3 = 2 - i\sqrt{3}$.
Como V es un espacio real entonces el **único** valor propio de T es $\lambda_1 = 1$.
Calculemos ahora los vectores propios de T asociados al valor propio 1:

$$\left\{\begin{array}{l}(2-\lambda_1)\,x - y + 0z = 0,\\ 3x + (2-\lambda_1)\,y + 0z = 0,\\ 0x + 0y + (1-\lambda_1)\,z = 0,\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x - y = 0,\\ 3x + y = 0,\\ 0z = 0,\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 0,\\ y = 0,\\ z \in \mathbb{R}.\end{array}\right.$$

Obsérvese que el sistema debe quedar **compatible indeterminado** pues elegimos λ para que $\det(A - \lambda I)$ sea nulo. Por lo tanto los vectores propios que buscábamos son todos los vectores de coordenadas $(0, 0, \alpha)$ con $\alpha \neq 0$, en la base B. O sea, si $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ entonces

$$S_1 = \{v \in V \,:\, v = \alpha v_3,\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Observación 40. *Los valores propios de T son las soluciones λ en $\mathbb{K}$ de la ecuación* $\det(A - \lambda I) = 0$ *(observar que son raíces de un polinomio de grado la dimensión del espacio vectorial). Para cada solución λ, los vectores propios correspondientes tienen como coordenadas en la base B ($A = {}_B(T)_B$), las soluciones no nulas del sistema de ecuaciones:*

$$(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde $A = {}_B((T))_B$ es una matriz asociada al operador T.

Definición 41 (Valores y vectores propios de una matriz)**.** *Sea A una matriz cuadrada con entradas en $\mathbb{K}$. Se llama **vector propio** de A, asociado al **valor propio** $\lambda \in \mathbb{K}$ a todo vector no nulo de $\mathbb{K}^n$ $(x_1, \ldots, x_n)$ tal que*

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Observar que la definición es la correspondiente a la transformación lineal $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ tal que $T(\vec{X}) = A\vec{X}$. En este caso A es la matriz asociada en las bases canónicas en las cuales coordenadas y vectores coinciden.

Para determinar vectores propios de un operador o matriz primero hallamos los valores propios del mismo. En el ejemplo anterior se pudo observar que, los valores propios de un operador son, de hecho, raíces de cierto polinomio. La siguiente proposición establece esto como un hecho general.

Proposición 42. *Sea A una matriz $n\times n$. El $\det(A-\lambda I)$, que se indicará por $\chi_A(\lambda)$, es un polinomio de grado n en λ cuyo término independiente coincide con el determinante de A.*

<u>Demostración:</u>

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Al realizar las operaciones correspondientes a la definición de determinante se observa que resulta un polinomio en λ. Y como el término independiente de cualquier polinomio es su valor en cero:

$$\chi_A(0)=\det(A-0I)=\det(A).$$

El lector puede probar utilizando la definición inductiva del determinante que

$$\chi_A(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}traza(A)\lambda^{n-1}+\cdots+\det A.$$

Definición 43 (Polinomio característico de una matriz)**.** *Se llama **polinomio característico** de una matriz cuadrada A al polinomio $\chi_A(\lambda)$. Se llama **ecuación característica**, a $\chi_A(\lambda)=0$ y **raíces características** de A a todas las soluciones (reales y complejas) de la ecuación característica de A.*

Proposición 44. *Sean $A,B\in\mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times n}$ dos matrices semejantes. Entonces, $\chi_A(\lambda)=\chi_B(\lambda)$, en particular, tienen iguales valores propios con la misma multiplicidad como raíces de la ecuación característica.*

<u>Demostración:</u> Las matrices A y B son semejantes por lo que también lo son $(A-\lambda I)$ y $(B-\lambda I)$. Entonces, como las matrices semejantes tienen el mismo determinante, resulta que

$$\chi_A(\lambda)=\chi_B(\lambda).$$

□

Como se verá en próximos ejemplos la igualdad de los polinomios característicos es una condición **necesaria**, pero **no suficiente** para asegurar la semejanza de las matrices.

Definición 45 (Polinomio característico de una transformación lineal)**.** *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y $T\colon V \to V$ un operador lineal. Se llama* ***polinomio característico*** *de T al polinomio característico de cualquier matriz asociada a T. Usaremos como notación: χ_T.*
De manera análoga se define ecuación característica y raíces características de un operador.

Observación 46.

- Como los polinomios característicos de matrices semejantes son iguales podemos asegurar que el polinomio característico de un operador lineal está bien definido puesto que no depende de la matriz asociada al operador que se elija.
- Previamente se demostró que λ es valor propio de T si y solo si $\lambda \in \mathbb{K}$ y λ es raíz característica de T. Entonces, en el caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ no todas las raíces características son necesariamente valores propios (sólo lo serán aquellas que sean reales). En el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, en cambio, toda raíz característica es valor propio.

---

3. EJERCICIOS: Valores y vectores propios

Ejercicio 23. *Para las siguientes transformaciones lineales verificar que el vector v dado es un vector propio. Hallar el correspondiente valor propio.*

1. $T : I\!R^3 \to I\!R^3$ tal que : $T(x,y,z) = (\ -2z,\ x+2y+z,\ x+3z\ )$ y $v = (-1,0,1) \in I\!R^3$.
2. Dados $\{p_1, p_2, p_3\}$, con $p_i(t) = t^{i-1}\,(i = 1,2,3)$, es la base canónica de $\mathcal{P}_2(I\!R)$. Consideramos $T : \mathcal{P}_2(I\!R) \to \mathcal{P}_2(I\!R)$ tal que:

$$\begin{aligned} T(p) \overset{def}{=} \quad & [p(0) - 4p'(0) + p''(0)]\,p_1 \\ & + [-4p(0) + p'(0) - p''(0)]\,p_2 + [2p(0) - 2p'(0) - p''(0)]\,p_3, \end{aligned}$$

donde $v(t) \in \mathcal{P}_2(I\!R)$ es $v(t) = 2t^2 + t \quad \forall t \in I\!R$.

3. $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$tal que

$$T(M) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} M \text{ y } v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

EJERCICIO 24. *Para las siguientes matrices verificar que el vector x dado es un vector propio. Hallar el correspondiente valor propio.*

i. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ii. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

iii. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 25. *Para las siguientes transformaciones lineales*

$$T : \mathbb{K}^2 \to K^2 \quad T(x,y) = (\ -2x - 7y,\ x + 2y\ )$$
$$T : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3, \quad T(x,y,z) = (\ x,\ z,\ y\ )$$
$$T : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3, \quad T(x,y,z) = (\ x,\ z,\ -y\ ),$$

1. Hallar valores propios y bases de los subespacios propios de T, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
2. Hallar valores propios y bases de los subespacios propios de T, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

EJERCICIO 26.

Hallar los valores propios y bases de los subespacios propios de la transformación lineal $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ tal que

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4a + b + d & 2a + 3b + d \\ -2a + b + 2c - 3d & 2a - b + 5d \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 27.

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que: ${}_B(T)_B = A$, donde $B = \{(1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}$.

1. Hallar los valores propios y los subespacios propios de A.
2. Hallar los valores propios y los subespacios propios de T.

EJERCICIO 28 (EXAMEN JULIO 1989, partes a), b), c) del EJERCICIO $N^o 2$).

1. Dados $p_1(t) = t(t-1)$; $p_2(t) = t(t-2)$; $p_3(t) = (t-1)(t-2)$, $\forall t \in I\!R$, mostrar que $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base de $\mathcal{P}_2$.
2. Sea $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ tal que:

$$T(p) \stackrel{def}{=} \left[\frac{13}{2}p(0) + 4p(1) - \frac{1}{2}p(2)\right] p_1 + \left[-\frac{3}{2}p(0) - 3p(1) + \frac{1}{2}p(2)\right] p_2 + [p(0)]\, p_3.$$

   Probar que T es lineal.
3. Hallar los valores propios de T y bases de los subespacios propios de T.

Ejercicio 29.

Sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Probar que:

1. T es invertible $\Leftrightarrow$ 0 no es valor propio de T.
2. Si T es invertible y λ es valor propio de T $\Rightarrow$ λ^{-1} es valor propio de T^{-1}.
3. Si λ es valor propio de T $\Rightarrow$ λ^n es valor propio de T^n $\forall n \in I\!N$.
4. Si T es invertible y λ es valor propio de T $\Rightarrow$ λ^{-n} es valor propio de T^{-n} $\forall n \in I\!N$.

   Nota: Existen resultados análogos para matrices cuadradas.

Ejercicio 30. *Sea A una matriz $n \times n$.*

1. *Probar que A y A^t tienen el mismo polinomio característico.*
2. *Deducir que A y A^t tienen los mismos valores propios.*
3. *¿ A y A^t tienen los mismos vectores propios?*

Ejercicio 31. *Sean A y B dos matrices $n \times n$ semejantes.*

1. Probar que A y B tienen el mismo polinomio característico.
2. Deducir que A y B tienen los mismos valores propios.
3. ¿Qué relación existe entre los vectores propios de A y B?

---

4. Tranformaciones y Matrices diagonalizables

Definición 47 (Transformaciones lineales diagonalizables)**.** *Sea T: $V \to V$ una transformación lineal. Se llama* ***diagonalizable*** *si existe alguna base B tal que la matriz ${}_B(T)_B$ es una matriz diagonal (o sea, una matriz en la que todos los términos fuera de su diagonal principal son nulos).*

Dada A una matriz cuadrada, $A \in \mathcal{M}(\mathbb{K})_{n\times n}$, sabemos que A tiene asociada un operador lineal (T_A). La misma cumple ${}_C(T_A)_C = A$, donde C es la base canónica de K^n.

Por esto parece razonable definir que A es diagonalizable, si y sólo si T_A lo es. La transformación T_A es diagonalizable, si existe una base B tal que ${}_B(T_A)_B$ es diagonal; o sea, si existe una base B tal que ${}_B(Id)_C^{-1}\,{}_C(T)_C\,{}_C(Id)_B$ es diagonal. Por lo tanto, llamando $P = {}_C(Id)_B$, resulta que T_A es diagonalizable, si existe P invertible tal que $P^{-1}\,A\,P$ es diagonal. Esta idea motiva la siguiente definición:

Definición 48 (Matrices diagonalizables)**.** *Una matriz cuadrada se llama* **diagonalizable** *si es semejante a una matriz diagonal.*

Ejemplo 49.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si se elige como base de R^3 a B' = {(0,1,-1), (0,0,1), (1,0,-1)} resulta:

$$T(0, 1, -1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix};$$

o sea, $T(0, 1, -1) = 4(0, 1, -1) + 0(0, 0, 1) + 0(1, 0, -1)$.

Análogamente:

T(0,0,1)=(0,0,2)=0(0,1,-1)+2(0,0,1)+0(1,0,-1),

T(1,0,-1)=(3,0,-3)=0(0,1,-1)+0(0,0,1)+3(1,0,-1).

Entonces ${}_B(T)_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y por lo tanto T es diagonalizable.

El siguiente teorema nos da un método para reconocer transformaciones y matrices diagonalizables, y al mismo tiempo nos da la base en la cual diagonaliza.

Teorema 50. *T es diagonalizable si y sólo si existe alguna base de V constituida por vectores propios de T. En este caso la matriz asociada en una base de vectores propios (tomada como base de partida y llegada) es diagonal.*

Demostración:

($\Rightarrow$): T es diagonalizable. Entonces, por definición, existe $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ tal que:

$$_B(T)_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

y por lo tanto: $T(v_1) = \lambda_1 v_1,\ T(v_2) = \lambda_2 v_2, \cdots,\ T(v_n) = \lambda_n v_n$. Entonces B está constituida por vectores propios de T asociados a los valores propios $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots, \lambda_n$.

($\Leftarrow$): Si existe una base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ constituida por vectores propios, entonces $T(v_1) = \lambda_1 v_1,\ T(v_2) = \lambda_2 v_2, \ldots,\ T(v_n) = \lambda_n v_n$ y por definición de matriz asociada se cumple que:

$$_B(T)_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$\square$

Corolario 51. *Si T es diagonalizable, su forma diagonal*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

es única a menos del orden de $\lambda_1,\ \lambda_2, ..., \lambda_n$. que son los valores propios de T.

Ejemplo 52.

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

no es diagonalizable en R pues sus raíces características no son reales, lo que implica que no tiene ni valores ni vectores propios.

Teorema 53. *Sea* $T : V \to V$ *una transformación lineal;* $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ *valores propios dos a dos distintos; y* $v_1, v_2, \ldots, v_h$ *vectores propios correspondientes a cada uno de los valores propios anteriores. Entonces,* $\{v_1, v_2, \ldots, v_h\}$ *es un conjunto linealmente independiente.*

Demostración:
Realizaremos la prueba por inducción en la cantidad de valores propios h.
Si $h = 1$, sea λ_1 y v_1 un vector propio asociado, como $v_1 \neq \vec{0}$ entonces $\{v_1\}$ es un conjunto L.I.

Supongamos que el resultado es válido para h valores propios diferentes, lo demostraremos para $h+1$ valores propios distintos.

Sean entonces $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{h+1}$ valores propios distintos y $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_{h+1}\}$ con $v_i \in S_{\lambda_i}$, $v_i \neq \vec{0}$, $\forall i = 1, \ldots, h+1$.
Queremos probar que A es L.I. así que consideremos escalares $a_1, a_2, \ldots, a_{h+1}$ tales que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_h v_h + a_{h+1} v_{h+1} = \vec{0}. \tag{2}$$

Aplicando T a la ecuación anterior, resulta que:

$$a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + a_h \lambda_h v_h + a_{h+1} \lambda_{h+1} v_{h+1} = \vec{0}. \tag{3}$$

Multiplicando (2) por $-\lambda_{h+1}$ y sumándoselo a (3), se tiene que:

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_{h+1}) v_1 + \cdots + a_h(\lambda_h - \lambda_{h+1}) v_h = \vec{0}.$$

En virtud de la hipótesis de inducción el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_h\}$ es L.I. y por lo tanto

$$a_i(\lambda_i - \lambda_{h+1}) = \vec{0},\ \forall\, i = 1, 2, \ldots, h.$$

y como $\lambda_i \neq \lambda_{h+1}$ entonces $a_i = 0\ \forall\, i = 1, 2, \ldots, h$.
Por lo tanto, sustituyendo en (2) resulta que

$$a_{h+1} v_{h+1} = \vec{0}$$

y como $v_{h+1} \neq \vec{0}$ entonces se deduce que $a_{h+1} = \vec{0}$, probando que A es L.I.

$\square$

Corolario 54. *Si dim* $(V) = n$, T*:* $V \to V$ *tiene* n *valores propios todos distintos entonces* T *es diagonalizable.*

Demostración:
Si $v_1, \cdots, v_n$ son vectores propios correspondientes respectivamente a los n valores propios distintos, de T se tiene por el teorema anterior, que $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es L.I. Como $dim\ (V) = n$, entonces $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es base y por el teorema 2.1, resulta que T es diagonalizable.

$\square$

Observación 55. *El recíproco del corolario anterior es falso. Un contraejemplo se encuentra en el próximo ejemplo.*

Ejemplos 56.

Ejemplo 57. *¿Es diagonalizable la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ *?*

Comenzamos calculando el polinomio característico de A

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -5 & 0 \\ 0 & 7-\lambda & 0 \\ 0 & -5 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 (7-\lambda)$$

entonces

$$\chi_A(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \text{ raíz doble}, \\ \lambda = 7. \end{cases}$$

Para λ=2, los vectores propios asociados (x, y, z) cumplen la ecuación

$$-5y = 0$$

siendo x y z cualesquiera. Por lo tanto, $S_2 = \{(\alpha, 0, \beta)\ \text{ con }\ (\alpha, \beta) \neq (0, 0)\}$.
Para $\lambda = 7$, los vectores propios asociados verifican el sistema

$$\begin{cases} -5x - 5y = 0, \\ -5y - 5z, \end{cases} \Longrightarrow x = -y = z.$$

Por lo tanto $S_7 = \{(\gamma, -\gamma, \gamma)\ \text{con}\ \gamma \in \mathbb{R}\}$.

Resulta entonces que $\{(1,0,0), (0,0,1), (1,-1,1)\}$ es una base de vectores propios de A y por lo tanto A resulta diagonalizable. Una forma diagonal es:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

La matriz P puede ser

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar P^{-1} y verificar que $P^{-1}AP = D$.

Ejemplo 58. *¿Es diagonalizable el operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que*

$$_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}} = A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} ?$$

Si lo es, diagonalizarlo (o sea, hallar una matriz diagonal asociada a T y la base en la que lo es).
Para esto en primer lugar calculamos su polinomio característico.

$$\chi_T(\lambda) = det\,(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)\,(4-\lambda)\,(\;2-\lambda)\,.$$

Entonces

$$\chi_A(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3, \\ \lambda = 4, \\ \lambda = 2. \end{cases}$$

En consecuencia T es diagonalizable ya que tiene tres valores propios distintos.

Una forma diagonal es $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Una base en la que T se diagonaliza es una base de vectores propios.

Al valor propio λ=2 le corresponde como vectores propios los vectores (x,y,z) $\neq$ (0,0,0) tales que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, (0,0,1) es un vector propio. Análogamente, (1,0,-1) es un vector propio asociado al valor propio λ=3 y (0,1,-1) es un vector propio asociado al valor propio λ=4.

De esta manera, una base de vectores propios en la que A se diagonaliza puede ser (no es única) $\{(0,0,1),(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ y la correspondiente matriz P de cambio de base que diagonaliza a A es:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como ejercicio, se puede hallar P^{-1}, y comprobar que $P^{-1}A\ P$ es diagonal. También como ejercicio, se puede tomar

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

donde la primera columna es un vector propio con valor propio 3, la segunda tiene como valor propio 4 y la tercera a 2, y hallar $Q^{-1}A\ Q$.

Ejemplo 59. *¿Es diagonalizable la matriz*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} \ ?$$

$$\chi_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -4 & 1 \\ 0 & 7-\lambda & 0 \\ 0 & -5 & 2-\lambda \end{pmatrix}=(2-\lambda)^2(7-\lambda)$$

En consecuencia

$$\chi_A(\lambda)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda=2, & \textit{raíz doble}, \\ \lambda=7. \end{cases}$$

Para $\lambda=2$, los vectores propios asociados cumplen

$$\begin{cases} -4y+z=0, \\ 5y=0, \\ -5y=0, \end{cases} \Longrightarrow z=y=0,\ x\in\mathbb{R}.$$

El sistema es indeterminado y por lo tanto $S_2=\{(\alpha,0,0)/\alpha\in R\}$.

Para $\lambda = 7$, los vectores propios asociados cumplen

$$\begin{cases} -5x - 4y + z = 0, \\ 0y = 0, \\ -5y - 5z = 0, \\ \end{cases} \Longrightarrow y = -z = -x.$$

Por lo tanto, $S_7 = \{(\gamma, -\gamma, \gamma)$ con $\gamma \in R\}$

En este caso ***no*** *se pueden elegir tres vectores propios que sean linealmente independientes por lo tanto A* ***no es diagonalizable.***

Este ejemplo y el anterior muestran dos matrices con el mismo polinomio característico pero que no son semejantes.

Definición 60. *Sea λ un valor propio del operador $T : V \to V$ se definen:*

- ***multiplicidad algebraica*** *de λ al orden de multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico de T y lo notaremos como ma(λ).*
- ***multiplicidad geométrica*** *de λ a la dimensión del subespacio S_λ y se notara mg(λ).*

Observación 61. *Para cualquier valor propio λ se cumple:*

$$1 \leq mg\,(\lambda) \leq ma\,(\lambda) \leq n.$$

La demostración de este hecho queda a cargo del lector y se encuentra en el ejercicio(33).

El operador $T : V \to V$ es diagonalizable si y sólo todos los valores propios son escalares de $\mathbb{K}$ y las multiplicidades geométricas de todos sus valores propios coincide con sus multiplicidades algebraica.

Dicho de otra forma, si existe algún valor propio para el cual no tenemos tantos vectores propios linealmente independientes asociados a él como su multiplicidad algebraica, entonces el operador no es diagonalizable.

5. Una aplicación: Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales.

Consideremos la ecuación diferencial $\dot{y} = ay$, es fácil verificar que la solución general es $y(t) = ce^{at}$ con $c \in \mathbb{R}$. Supongamos ahora el siguiente problema: se desea determinar dos funciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$ tales que

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = cx + dy, \end{cases}$$

El problema anterior se puede escribir es forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

o de forma equivalente: $\dot{X} = AX$ donde

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}.$$

Naturalmente el problema anterior recuerda a un sistema lineal de ecuaciones, salvo que las incógnitas son funciones. Sin embargo al igual que en los sistemas lineales de ecuaciones si $b = c = 0$, el problema resulta sencillo de resolver, pues

$$\begin{cases} \dot{x} = ax, \\ \dot{y} = dy, \end{cases}$$

y como cada ecuación solo contiene una de las incógnitas, se pueden resolver de manera independiente y como recordamos anteriormente resulta que

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} x(t) = c_1 e^{at}, \\ y(t) = c_2 e^{dt}, \end{cases}$$

Intentemos ahora reducir el caso general a esta situación más sencilla. Por el momento, supongamos que A es diagonalizable, es decir existe P invertible y D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$.
Como $\dot{X} = AX$, entonces $\dot{X} = \left(PDP^{-1}\right) X$ y por lo tanto

$$P^{-1}\dot{X} = D\left(P^{-1}X\right).$$

Hacemos el cambio $Y = P^{-1}X$ en la ecuación anterior, de este cambio resulta que $\dot{Y} = DY$ donde $\dot{Y} = P^{-1}Y$.

Sea $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, entonces si

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

es diagonal utilizando (4) resulta que:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

Naturalmente, lo que se desea determinar es $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, para lo cual se tiene que $X = PY$ y por lo tanto:

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 62. *Se considera el sistema:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_1 - 6x_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 4x_2, \end{cases}$$

y su equivalente matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable con $A = PDP^{-1}$ donde

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Haciendo el cambio $Y = P^{-1}X$, el sistema (5) resulta:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{2t} \\ c_2e^{-t} \end{pmatrix}$ y deshaciendo el cambio de variable se tiene que:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = PY = P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1e^{2t} \\ c_2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1e^{2t} + c_2e^{-t} \\ c_1e^{2t} + c_2e^{-t} \end{pmatrix}$$

---

6. EJERCICIOS: Diagonalización

EJERCICIO 32.

Dada la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

1. $T(x, y, z) = (2y + z, 2x + z, x + y + z)$
2. $T(x, y, z) = (4x - 5y + 2z, 5x - 7y + 3z, 6x - 9y + 4z)$
3. $T(x, y, z) = \left(2y + 4z, \frac{1}{2}x + 2z, \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y\right)$
4. $T(x, y, z) = (y, -4x + 4y, 2x + y + 2z)$
5. $T(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$

   a) Hallar $A =_{\mathcal{C}} (T)_{\mathcal{C}}$, donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$
   b) Hallar los valores propios de T
   c) Hallar bases de los subespacios propios de T
   d) Investigar si T es diagonalizable.

EJERCICIO 33. *Sea $T : V \to V$, lineal y λ valor propio de T. Llamamos mg a la multiplicidad geométrica del valor propio λ, es decir :*

$$mg(\lambda) = dim(N(T - \lambda Id)).$$

Llamamos ma a la multiplicidad algebraica del valor propio λ, es decir :

$$ma(\lambda) = \textit{multiplicidad de } \lambda \textit{ como raíz del polinomio característico de } T.$$

Se quiere probar que $mg \leq ma$ y ver su aplicación en el estudio de la diagonalización.

1. Halle la forma que adquiere la matriz asociada $_B(T)_B$ donde B es una base obtenida de completar una base del subespacio S cuando S es un subespacio invariante bajo T. Recordemos que un subespacio S es invariante bajo T sii $\forall\, s \in S \quad T(s) \in S$.
2. Pruebe que si S es invariante bajo T entonces el polinomio característico de la restricción de T a S divide al polinomio característico de T.

3. Pruebe que S_λ (subespacio propio asociado al valor propio λ) es invariante bajo T.
4. Pruebe que si $\tilde{T}$ es la restricción de T al subespacio S_λ ($\tilde{T} : S_\lambda \to S_\lambda \ / \ \tilde{T}(s) = T(s) \quad \forall\, s \in S_\lambda$), entonces $\tilde{T} = \lambda Id$ y su polinomio característico es: $\chi_{\tilde{T}}(t) = (\lambda - t)^g$.
5. Utilizar los resultados anteriores para probar que $mg \leq ma$.
6. Pruebe que T es diagonalizable si y solo si todas las raíces del polinomio característico están en el conjunto de escalares y para cada uno de ellos sus multiplicidades geométrica y algebraica coinciden.

Ejercicio 34.
Dadas las matrices:

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1-i \\ 1+i & 5 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1+i \\ 0 & -1-i & 0 \end{pmatrix}$ (e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Hallar los valores propios de A y bases de los subespacios propios de A
2. Deducir que A es diagonalizable
3. Hallar una matriz diagonal D semejante a la matriz A y la matriz invertible P tal que $D = P^{-1}AP$.

Ejercicio 35.
Hallar valores propios y bases de los subespacios propios de T. ¿Es diagonalizable?

1. $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$; $T(x,y) = (2y + 2iy, 2x + i\,[-2x + 4y]\ )$
2. $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$; $T(x,y,z) = (\ [1+i]\,z, 3z,\ [1-i]\,x - y\ )$
3. $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$; $T(x,y,z) = (-ix + 2z, iy + z, -2iz)$

Ejercicio 36. *Dados x, $y \in \mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, dos vectores columna ortogonales no nulos. Encuentre los valores propios de la matriz $A = xy^T$ especificando sus multiplicidades algebraicas y geométricas.*

Ejercicio 37.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

Indique la opción correcta:

A) A es diagonalizable $\forall a \in \mathbb{R}$.
B) A es diagonalizable sólo para $a > 0$.
C) A es diagonalizable sólo para $a > 1$.
D) A es diagonalizable sólo para $a = 0$ y $a = 1$.
E) A no es diagonalizable para ningún a.

Ejercicio 38. *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que su matriz asociada en la base canónica es simétrica. Probar que T es diagonalizable.*

Ejercicio 39 (EXAMEN DICIEMBRE 1989, partes a) y b) del EJERCICIO $N^o 2$).

1. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal; S_1 y S_2 subespacios de V invariantes bajo T.
   Probar que:
   a) $S_1 \cap S_2$ es invariante bajo T.
   b) $S_1 + S_2$ es invariante bajo T.
2. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal y S un subespacio de V con $dim(S) = 1$ e invariante bajo T.
   a) Probar que los vectores no nulos de S son vectores propios de T.
   b) ¿S es un subespacio propio T?. Justifique la respuesta.
3. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que los subespacios
$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + 2y - z = 0 \ \}$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z = 0 \ \}$$
$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y - 2z = 0 \ \}$$
   son invariantes bajo T
   a) Probar que T es diagonalizable
   b) Sabiendo que
$$2T - T^2 = I \ \text{ en } \ \mathrm{S}_1$$
$$T = 2I \ \text{ en } \ \mathrm{S}_2 \cap \mathrm{S}_3$$
   hallar los valores propios de T.

Ejercicio 40 (EXAMEN JULIO 1985, EJERCICIO $N^o 3$).

Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $I\!R$, $T : V \to V$ una transformación lineal con tres valores propios $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ y $S_{\lambda_1},\ S_{\lambda_2},\ S_{\lambda_3}$ los respectivos subespacios propios.

1. Sabiendo que $T = T^3$, hallar $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
2. Sea $v \in V$, probar que
   a) $\frac{1}{2}T^2(v) - \frac{1}{2}T(v) \in S_{\lambda_1}$
   b) $v - T^2(v) \in S_{\lambda_2}$
   c) $\frac{1}{2}T(v) + \frac{1}{2}T^2(v) \in S_{\lambda_3}$
3. Probar que $V = S_{\lambda_1} \oplus S_{\lambda_2} \oplus S_{\lambda_3}$
4. Probar que T es diagonalizable.
5. Si $dim(V) = 4$, hallar las posibles matrices diagonales asociadas a T

Ejercicio 41.

Investigar si la matriz $B = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

Ejercicio 42. *Estudiar para que valores reales de α la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-\alpha \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable.

Ejercicio 43. *Encontrar los valores de a, $b \in \mathbb{R}$ para que la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sea diagonalizable.

Ejercicio 44 (Diagonalización simultánea).

Sean T, $S : I\!R^3 \to I\!R^3$ tales que:

$$T(x,y,z) = (\ 2y-2z,\ 2x+2z,\ 2z\ ),$$
$$S(x,y,z) = (\ \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3}y + 2z,\ -\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y + z,\ \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3}y\ )$$

1. Hallar los subespacios propios de T .
2. Hallar los subespacios propios de S .
3. Hallar una base de $I\!R^3$ en la cual T y S se diagonalicen simultáneamente.

7. Teorema de Gershgorin

En muchos problemas prácticos debemos determinar valores propios de matrices a las que resulta difícil calcularles las raíces características en forma exacta. En consecuencia, para resolver problemas de este tipo se utilizan métodos de cálculo aproximado. Para dichos métodos resulta de gran ayuda acotar previamente la región del plano complejo donde se encuentran las raíces características.

Definición 63. *Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(\mathbb{C})_{n\times n}$ llamaremos r_i a la suma de los módulos de las entradas de la fila i-ésima de A, exceptuando la entrada ubicada en la diagonal*

$$r_i = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|.$$

Sea $\mathcal{C}_i$ el disco de centro a_{ii} y radio r_i

$$\mathcal{C}_i = \{z \in \mathbb{C} \, : \, |z - a_{ii}| \leq r_i\}.$$

Teorema 64 (Teorema de Gershgorin)**.** *Sea $A \in \mathcal{M}(\mathbb{C})_{n\times n}$.*

1. *Si λ es valor propio de A entonces*

$$\lambda \in \cup_i \mathcal{C}_i,$$

   dicho de otra forma, cada valor propio se encuentra en algún círculo $\mathcal{C}_i$.
2. *Si $M = \mathcal{C}_{i_1} \cup \ldots \cup \mathcal{C}_{i_m}$ es disjunta con la unión de los restantes discos entonces en M hay exactamente m valores propios de A (contados con su multiplicidad como raíces del polinomio característico).*

Demostración:

(1) Sean λ_0 un valor propio de A y $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ un vector propio asociado al valor propio λ_0. Elegimos i_0 tal que $|x_{i_0}| = \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$. Probaremos que $\lambda_0 \in \mathcal{C}_{i_0} = \{z \in \mathbb{C} \, : \, |a_{i_0 i_0} - z| \leq r_{i_0}\}$. Como

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i_0} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i_0} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

En particular observando la i_0-ésima componente se tiene que

$$a_{i_01}x_1 + \cdots + a_{i_0i_0}x_{i_0} + \cdots + a_{i_0n}x_n = \lambda_0 x_{i_0}$$

entonces agrupando y tomando módulo resulta que

$$|(\lambda_0 - a_{i_0i_0})x_{i_0}| = \left| \sum_{j\neq i_0} a_{i_0j}x_j \right|$$

entonces

$$|(\lambda_0 - a_{i_0i_0})||x_{i_0}| \leq \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0j}||x_j|.$$

Como $|x_{i_0}| \geq |x_j| \; \forall j = 1,\ldots,n$ y $|x_{i_0}| \neq 0$ (¿por que?) se deduce que

$$|(\lambda_0 - a_{i_0i_0})| \leq \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0j}|\frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leq \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0j}| = r_{i_0}$$

con lo cual queda probada la parte 1.

(2) De la segunda parte sólo daremos un bosquejo de demostración.

Sean

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ y } E = A - D.$$

Para cada $\varepsilon \in [0,1]$ definimos $A_\varepsilon = D + \varepsilon E$.

La familia de matrices A_ε puede pensarse como una familia de "deformaciones sucesivas"que transforma la matriz $D = A_0$ en la matriz $A = A_1$. Para cada ε consideremos X_ε el polinomio característico de A_ε, sus coeficientes son funciones continuas de variable ε y aunque no es inmediato, es posible probar que las raíces de X_ε: $\lambda_1(\varepsilon),\ldots,\lambda_n(\varepsilon)$ también son funciones continuas de variable ε. O sea $\lambda_i(\varepsilon)$ es una curva continua que une $\lambda_i(0) = a_{ii}$ con $\lambda_i(1)$ un valor propio de A. En virtud de la parte 1 $\lambda_i(\varepsilon) \in \cup_j \mathcal{C}_j(\varepsilon) \; \forall \, \varepsilon \in [0,1]$ y como $\mathcal{C}_i(\varepsilon)$ es una familia de discos todos centrados en a_{ii} de radio creciente con ε, se deduce que $\lambda_i(\varepsilon) \in \cup_j \mathcal{C}_j(1) = \cup_j \mathcal{C}_j \; \forall \varepsilon \in [0,1]$ Sea $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ entonces $M = \cup_{j\in I}\mathcal{C}_j$. Llamemos $N = \cup_{j\notin I}\mathcal{C}_j$. Probaremos que $\lambda_j(1) \in M \; \forall \, j \in I$ (es decir que en M hay exactamente m valores propios de A). Supongamos que esto no ocurre, o sea existe un $p \in I$ tal que $\lambda_p(1) \in N$ entonces, como

$$\lambda_p(\varepsilon) \in \cup_k \mathcal{C}_k = M \cup N \; \forall \, \varepsilon \in [0,1]$$

$$\lambda_p(0) \in M, \quad \lambda_p(1) \in N \text{ y } M \cap N = \emptyset$$

la curva $\lambda_p(\varepsilon)$, con $\varepsilon \in [0,1]$ debe tener dos trazos disjuntos lo cual contradice la continuidad de λ_p.

Ejemplo 65. *Consideremos*

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 3 & 25 & 0 \\ 2 & 1 & 32 \end{pmatrix}.$$

Para esta matriz $a_{11} = 10$, $r_1 = |1| + |-1| = 2$, $a_{22} = 25$, $r_2 = 3$, $a_{33} = 32$ y $r_3 = 3$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 10| \leq 2\}, \\ \mathcal{C}_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 25| \leq 3\}, \\ \mathcal{C}_3 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 32| \leq 3\}. \end{aligned}$$

Como los tres discos son dos a dos disjuntos en cada uno de ellos hay exactamente una raíz característica de A. Éstas deben ser reales (si alguna fuera compleja también sería raíz característica su conjugada y ambas pertenecerían al mismo disco.) y por lo tanto las tres son valores propios de A diferentes y por lo tanto A es diagonalizable. Además el teorema de Gershgorin asegura que cada uno de los tres valores propios de A deben encontrarse en los intervalos $[8, 12]$, $[22, 28]$ y $[29, 35]$ respectivamente.

El razonamiento anterior se puede generalizar para matrices de cualquier tamaño de entradas reales y cuyos discos de Gershgorin sean dos a dos disjuntos. Esto ofrece un criterio para asegurar que un polinomio de coeficientes reales tiene todas sus raíces reales.

---

8. EJERCICIOS: Teorema de Gerschgorin.

Ejercicio 45.

Sea A una matriz *real* $n \times n$ tal que $\quad \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j = \emptyset \quad (i \neq j) \quad$, donde $\mathcal{C}_i$ son los círculos de Gerschgorin de A $(i = 1, 2, \cdots, n)$. Probar que todas las raíces del polinomio característico de A son reales y distintas.

Ejercicio 46.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 14 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -9 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -20 \end{pmatrix}$

1. Probar que A tiene cuatro valores propios reales y distintos.
2. Determinar el signo de los valores propios de A y deducir que es invertible.

Ejercicio 47.

1. Utilice el Teorema de Gerschgorin para acotar los valores propios de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -10^{-5} & 2{,}10^{-5} \\ 4{,}10^{-5} & 0,5 & -3{,}10^{-5} \\ -10^{-5} & 3{,}10^{-5} & 0,1 \end{pmatrix}$$

2. Sea $S = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$
   Hallar los círculos de Gerschgorin de la matriz $S^{-1}AS$
3. Hallar α de modo que el radio r_1 del círculo con centro en $(S^{-1}AS)_{1\,1}$ sea tan pequeño como sea posible sin que este círculo se intersecte con los otros dos círculos.
4. Localice el valor propio λ_1 de la matriz A en un círculo tan pequeño como sea posible.
   (Observar que los valores propios de A y $S^{-1}AS$ son los mismos).
5. Utilice matrices análogas a S para obtener mejores aproximaciones de λ_2 y λ_3

Ejercicio 48.

Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Probar que para cada matriz $\lambda = 2$ es un valor propio con multiplicidad algebraica 4
2. En cada caso calcule la multiplicidad geométrica.

Ejercicio 49.

Probar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 14 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -9 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -20 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

Sugerencia: Utilice el teorema de Gershgorin para localizar los valores propios.

---

9. Ejercicios de Evaluación

Ejercicio 1

Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que representa una simetría respecto el plano $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+5y-13z = 0\}$. Indicar cuál de las siguientes opciones es correcta:

1. T es diagonalizable y el determinante de la matriz asociada en las bases canónicas es -1.
2. T es diagonalizable y el determinante de la matriz asociada en las bases canónicas es 5.
3. T no es diagonalizable y el determinante de la matriz asociada en las bases canónicas es -1.
4. T no es diagonalizable y el determinante de la matriz asociada en las bases canónicas es 5.
5. T no es diagonalizable y el determinante de la matriz asociada en las bases canónicas es 1.

Ejercicio 2

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

Indicar cuál de las siguientes opciones es correcta:

(1) A es diagonalizable $\forall a$.

(2) A es diagonalizable sólo si $a \neq 0$.

(3) A es diagonalizable sólo si $a \neq 1$.

(4) A es diagonalizable sólo si $a \neq 2$.

(5) A es diagonalizable sólo si $a \neq 1$ y $a \neq 2$.

Ejercicio 3

1. Una transformación de un espacio vectorial en si mismo, T es biyectiva (un isomorfismo) sí y solo sí 0 no es valor propio de T.

2. Probar que si:

$X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ es vector propio de $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ asociado al valor propio λ e

$Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ es vector propio de $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ asociado al valor propio μ

entonces

$Z = \begin{pmatrix} a\,u \\ a\,v \\ b\,u \\ b\,v \end{pmatrix}$ es vector propio de $M = \begin{pmatrix} \alpha\,b_{11} & \alpha\,b_{12} & \beta\,b_{11} & \beta\,b_{12} \\ \alpha\,b_{21} & \alpha\,b_{22} & \beta\,b_{21} & \beta\,b_{22} \\ \gamma\,b_{11} & \gamma\,b_{12} & \delta\,b_{11} & \delta\,b_{12} \\ \gamma\,b_{21} & \gamma\,b_{22} & \delta\,b_{21} & \delta\,b_{22} \end{pmatrix}$
asociado al valor propio $\lambda\,\mu$

Observar que la tesis se puede escribir por bloques como:

$Z = \left(\begin{array}{c} a\,Y \\ \hline b\,Y \end{array}\right)$ es vector propio de $M = \left(\begin{array}{c|c} \alpha\,B & \beta\,B \\ \hline \gamma B & \delta B \end{array}\right)$ asociado al valor propio $\lambda\,\mu$

3. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $_B((T))_B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

donde $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Calcular los valores y vectores propios de T y analice si T es biyectiva. Justifique su respuesta.

Ejercicio 4

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$ matriz **real** ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) con $a \in \mathbb{R}$.

1. Discutir según a si A es diagonalizable. Justificar con cuidado.
2. Para los casos en que A no es diagonalizable y $|a| \geq 2$ hallar su forma canónica de Jordan. Justificar.

Ejercicio 5

La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$ con $a \neq 0$ es semejante a:

$$(I) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (II) \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (III) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(IV) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (V) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6

Se considera el siguiente **enunciado**:

Si V, W y U son espacios vectoriales de dimensión finita con bases B_V, B_W y B_U respectivamente, $A : V \to W$ y $T : W \to U$ son transformaciones lineales, entonces:

$$_{B_U}(T \circ A)_{B_V} = {}_{B_U}(T)_{B_W} \ {}_{B_W}(A)_{B_V} \tag{6}$$

I **Esquema de la demostración:**
Dado $\vec{v} \in V$ cualquiera, por ser $_{B_W}(A)_{B_V}$ la matriz asociada a A de base B_V a base B_W se tiene que

$$coord_{B_W}(A(\vec{v})) = {}_{B_W}(A)_{B_V} \ coord_{B_V}(\vec{v}) \tag{7}$$

Por ser $_{B_U}(T)_{B_W}$ la matriz asociada a T de base B_W a base B_U se tiene que

$$coord_{B_U}(T(A(\vec{v}))) = {}_{B_U}(T)_{B_W} \ coord_{B_W}(A(\vec{v})) \tag{8}$$

Sustituyendo (7) en (8), usando la definición de composición y propiedades de matrices, se tiene que

$$coord_{B_U}((T \circ A)(\vec{v})) = [{}_{B_U}(T)_{B_W} \ {}_{B_W}(A)_{B_V}] \ coord_{B_V}(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in V$$

de donde se concluye (6).

II **Esquema de la demostración,** para el caso $dim(V) = dim(W) = dim(U) = 2$.

Si las bases son $B_V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, $B_W = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$, $B_U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, y las matrices

son ${}_{B_W}(A)_{B_V} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ${}_{B_U}(T)_{B_W} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, entonces tenemos que

$$A(\vec{v}_1) = a\vec{w}_1 + c\vec{w}_2, \quad A(\vec{v}_2) = b\vec{w}_1 + d\vec{w}_2, \quad T(\vec{w}_1) = \alpha\vec{u}_1 + \gamma\vec{u}_2, \quad T(\vec{w}_2) = \beta\vec{u}_1 + \delta\vec{u}_2.$$

Usando las expresiones anteriores y la linealidad de A y T, podemos calcular el transformado por $(T \circ A)$ del vector $\vec{v}_1$ de la base V:

$$\begin{aligned} (9)\quad (T \circ A)(\vec{v}_1) &= T(A(\vec{v}_1)) = aT(\vec{w}_1) + cT(\vec{w}_2) = \\ &= a(\alpha\vec{u}_1 + \gamma\vec{u}_2) + c(\beta\vec{u}_1 + \delta\vec{u}_2) = (a\alpha + c\beta)\vec{u}_1 + (a\gamma + c\delta)\vec{u}_2, \end{aligned}$$

y por lo tanto, la primer columna de ${}_{B_U}(T \circ A)_{B_V}$ es $\begin{pmatrix} a\alpha + c\beta \\ a\gamma + c\delta \end{pmatrix}$.

Análogamente, se calcula $(T \circ A)(\vec{v}_2)$ y la segunda columna de ${}_{B_U}(T \circ A)_{B_V}$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} {}_{B_U}(T \circ A)_{B_V} = & \begin{pmatrix} a\alpha + c\beta & b\alpha + d\beta \\ a\gamma + c\delta & b\gamma + d\delta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = {}_{B_U}(T)_{B_W} \; {}_{B_W}(A)_{B_V}. \end{aligned}$$

Nota del Profesor: En la demostración (II) el alumno deberá asumir que el razonamiento hecho para espacios de dimensión 2 se puede generalizar a espacios de cualquier dimensión.

Indicar cuál de las siguientes opciones es correcta:

(1) El enunciado es cierto y sólo la demostración I es correcta.
(2) El enunciado es cierto y sólo la demostración II es correcta.
(3) El enunciado es cierto y ambas demostraciones son correctas.
(4) El enunciado es cierto y ambas demostraciones son incorrectas.

(5) El enunciado es falso.

Ejercicio 7

Indicar si es verdadero o falso que: Si dos matrices tienen el mismo polinomio característico, entonces son semejantes.

Ejercicio 8

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que ${}_{\mathcal{B}'}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

con $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,1)\}$, $\mathcal{B}'$ base de $\mathbb{R}^2$ y ${}_{\mathcal{B}}(I)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) $T(x,y) = (x, -x+2y)\ \forall\, x,y \in \mathbb{R}^2$.

(II) $T(x,y) = (3x-5y, 2x-4y)\ \forall\, x,y \in \mathbb{R}^2$.

(III) ${}_{\mathcal{B}'}(T)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(IV) ${}_{\mathcal{B}'}(T)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Indicar cuál de las siguientes opciones es correcta:

(1) Sólo las afirmaciones (I) y (III) son correctas.
(2) Sólo las afirmaciones (II) y (III) son correctas.
(3) Sólo las afirmaciones (I) y (IV) son correctas.
(4) Sólo las afirmaciones (II) y (IV) son correctas.
(5) Ninguna de las afirmaciones es correcta.

CAPíTULO 3

FORMA CANÓNICA DE JORDAN

En los ejemplos previos hemos visto que no todo operador lineal es diagonalizable. Hay dos tipos de razones para que un operador no pueda diagonalizarse:

- porque sus raíces características no están en el cuerpo, o
- porque aún estando en el cuerpo no coinciden sus multiplicidades geométrica y algebraica.

Para el último caso probaremos que existe una base en la cual la matriz asociada al operador es "casi"diagonal. Para enunciar con precisión este resultado necesitamos introducir algunas definiciones.

1. Subespacios invariantes

Definición 66. *Dado un operador $T : V \to V$ decimos que un subespacio W es* **invariante** *si $T(W) \subset W$.*

Proposición 67. *Sean V un espacio de dimensión finita, $T : V \to V$ una transformación lineal y W un subespacio invariante. Entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que*

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right).$$

Demostración:

Elegimos una base de W y la extendemos a una base de todo el espacio. Luego, basta usar la definición de matriz asociada. $\square$

Observación 68. *Si $V = U \oplus W$ y ambos subespacios son invariantes entonces existe una base donde*

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right).$$

El caso más sencillo de subespacio invariante es cuando $v \neq 0$ es vector propio, en ese caso el subespacio generado por v es invariante.

2. Forma canónica

En el caso que no podamos diagonalizar, o sea los subespacios invariantes no sean tan sencillos, debemos considerar las siguientes matrices que estrán asociadas a subespacios invariantes.

Definición 69 (Sub-bloque de Jordan)**.** *Se llama **sub-bloque de Jordan** de valor propio λ y tamaño k a una matriz $k \times k$ de la forma*

$$sJ_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Es decir un sub–bloque de Jordan es una matriz con λ en las entradas de la diagonal, 1 en las entradas de la sub–diagonal inferior y cero en el resto de las entradas.

Ejemplo 70.

El sub–bloque de Jordan de tamaño 3 y valor propio 2 es:

$$sJ_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definición 71 (Bloque de Jordan)**.** *Se llama **bloque de Jordan** de valor propio λ a una matriz cuadrada de la forma*

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \boxed{sJ_{k_1}(\lambda)} & & & \\ & \boxed{sJ_{k_2}(\lambda)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{sJ_{k_p}(\lambda)} \end{pmatrix}$$

con $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_p$ Es decir que un bloque de Jordan es una matriz cuadrada formada por sub–bloques de Jordan del mismo valor propio, "pegados"por la diagonal y ordenados de acuerdo a su tamaño.

Ejemplo 72.

Un bloque de Jordan de tamaño 5 y valor propio 2 puede ser:

$$J(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Otro bloque de Jordan del mismo tamaño y valor propio puede ser:

$$J(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Teorema 73 (Forma Canónica de Jordan)**.** *Sean V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y T un operador lineal tal que su polinomio característico*

$$X_T(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \ldots (\lambda - \lambda_q)^{m_q}$$

con $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $\forall\, i = 1, \ldots, q$. Entonces existe una base B de V tal que

$${}_B(T)_B = \begin{pmatrix} \boxed{J(\lambda_1)} & & & \\ & \boxed{J(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J(\lambda_q)} \end{pmatrix}$$

donde cada bloque $J(\lambda_i)$ es un bloque de Jordan de valor propio λ_i y tamaño m_i.

Demostración:

La demostración de este teorema excede los contenidos del curso y la omitimos aquí.

Observación 74. *En las condiciones del teorema anterior se puede demostrar que si existen bases B y B' de V tales que*

$$_B((T))_B = \begin{pmatrix} \boxed{J(\lambda_1)} & & & \\ & \boxed{J(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J(\lambda_q)} \end{pmatrix} \quad y$$

$$_{B'}((T))_{B'} = \begin{pmatrix} \boxed{J'(\lambda_1)} & & & \\ & \boxed{J'(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J'(\lambda_q)} \end{pmatrix}.$$

Cada J_{λ_i} y cada J'_{λ_i} es un bloque de Jordan de valor propio λ_i y tamaño m_i entonces $_B(T)_B = {}_{B'}(T)_{B'}$. Esto permite llamar a dicha matriz **forma canónica de Jordan** del operador T. La base B no es única y a cualquiera de ellas las denominaremos **bases de Jordan** de T.

Observación 75. *Supongamos que λ es un valor propio de una cierta transformación lineal T. Entonces el número de sub bloques del bloque de Jordan de valor propio λ es igual a la dimensión del subespacio propio de valor propio λ. Esto es a la multiplicidad geométrica de λ. En efecto un sub bloque debe terminar siempre con una* *columna correspondiente a un vector propio y por lo tanto la cantidad de sub-bloques coincide con la cantidad de vectores propios que existan en la base B.*

Ejemplo 76. *Vamos a determinar todas las posibles formas de Jordan de matrices 2×2 y 3×3.*

Comencemos por las matrices 2×2:
Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ tal que todas sus raíces características, pertenecen al cuerpo $\mathbb{K}$.

1. Si ambas raíces son distintas, es decir: $\chi_A(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b)$ con $a \neq b$, entonces A es diagonalizable y
$$J = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$
2. Si A tiene una raíz característica doble, es decir $\chi_A(\lambda) = (\lambda - a)^2$, aquí hay dos posibilidades:
   a) Si $dim(N(A - aI)) = 2$ entonces A es diagonalizable y
   $$J = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$
   b) Si $dim(N(A - aI)) = 1$ entonces A no es diagonalizable y
   $$J = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}.$$

Analicemos ahora las posibles formas de Jordan de las matrices 3×3.
Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K})$ tal que todas sus raíces características están en $\mathbb{K}$.

1. Si las tres raíces son distintas, es decir $\chi_A(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)$ entonces A es diagonalizable y
$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$
2. Si A tiene una raíz doble, es decir $\chi_A(\lambda) = (\lambda - a)^2(\lambda - b)$ con $a \neq b$, aquí hay dos posibilidades:
   a) Si $dim(N(A - aI)) = 2$ entonces A es diagonalizable y
   $$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

b) Si $dim(N(A-aI))=1$ entonces A no es diagonalizable y

$$J=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

3. Si A tiene una única raíz triple, aquí hay tres posibilidades:
   a) Si $dim(N(A-aI))=3$ entonces A es diagonalizable y

$$J=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

   b) Si $dim(N(A-aI))=2$ entonces A no es diagonalizable y

$$J=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

   c) Si $dim(N(A-aI))=1$ entonces A no es diagonalizable y

$$J=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 77. *El operador lineal de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base canónica es*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

no es diagonalizable.

Sus valores propios son 2 y 7, $S_2=[(1,0,0)]$ y $S_7=[(1,-1,1)]$ y ma(2)=2. En consecuencia la forma de Jordan del operador es

$$J=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Calculemos una base de Jordan $\{v_1,v_2,v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ asociada al operador. Para esto observemos que $Av_1=2v_1+v_2$ $Av_2=2v_2$ y $Av_3=7v_3$. Por lo tanto v_2 y v_3 son vectores propios asociados a 2 y 7 respectivamente por lo cual podemos elegir $v_2=$

$(1,0,0)$ y $v_3 = (1,-1,1)$. Elijamos ahora $v_1 = (x,y,z)$. Sabemos que $Av_1 = 2v_1 + v_2$ por lo tanto $(A-2I)v_1 = v_2$. Entonces

$$(A-2I)v_1 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resolviendo el sistema se deduce que $v_1 = (x,0,1)$ con $x \in \mathbb{R}$ elijamos entonces $v_1 = (0,0,1)$ con lo cual la base de Jordan B resulta

$$B = \{(0,0,1),(1,0,0),(1,-1,1)\}.$$

Verifique que efectivamente la matriz asociada al operador en la base B es J.

---

3. EJERCICIOS: Forma canónica de Jordan

Ejercicio 50.

Encontrar la forma y la base de Jordan de las siguientes matrices:

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 51.

Encontrar la forma y la base de Jordan en los siguientes casos:

1. $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.
4. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que: $T(x,y,z) = (-y-2z,\ x+3y+z, x+3z)$.
5. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que: $T(x,y,z) = (3x+2y-2z, 4y-z, y+2z)$.

EJERCICIO 52. *Encontrar la forma de Jordan de*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y calcular A^5*.*

EJERCICIO 53. *Probar por inducción que*

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

y calcular

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{10}.$$

EJERCICIO 54. *Dado un polinomio* $p(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ *definimos*

$$p(A) = \sum_{n=0}^{N} a_n A^n.$$

Dada $A = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ y $p(x) = x^2 + 5x + 6$, calcular $p(A)$ utilizando la forma canónica de A.

EJERCICIO 55. *Escribir todos los tipos posibles de forma de Jordan de matrices de orden menor o igual a 4.*

EJERCICIO 56. *Indicar cuál de las siguientes matrices es la forma canónica de Jordan de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(4)\quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)\quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 57. *Sea M una matriz con entradas reales 4×4, cuyo polinomio característico tiene raíces 3 y 5*
con $ma(3) = ma(5) = 2$.

Se quiere decidir cuáles de las siguientes matrices pueden ser M.

$$(I)\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad (II)\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (III)\begin{pmatrix} 20 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Indicar cuál de las siguientes opciones es correcta:

(1) *Todas pueden ser M.*
(2) *Sólo (III) puede ser M.*
(3) *Sólo (I) puede ser M.*
(4) *Sólo (I) y (III) pueden ser M.*
(5) *Ninguna puede ser M.*

Ejercicio 58. *Supongamos que T y S conmutan, esto es, $TS = ST$. Mostrar que $\ker(S)$ e Im (S) son subespacios invariantes por T.*
Mostrar que si p y q son polinomios, entonces $p(T)q(T) = q(T)p(T)$ y por lo anterior $\ker(q(T))$ e Im $(q(T))$ son invariantes por $p(T)$.

Ejercicio 59. *Sea $T : V \to V$ tal que $B = \{u, Tu, T^2u, \ldots, T^ku\}$ forma una base de V. Encuentre ${}_B((T))_B$.*

Ejercicio 60. *Dada la matriz asociada a T en la base canónica de $\mathbb{R}^3$*

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Hallar los subespacios invariantes de T asi como sus valores propios.

EJERCICIO 61. *¿ La matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & a & b \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable?, discutir según a, b y c.

En caso de ser diagonalizable indicar su forma diagonal D y una matriz P para la cual $A = P^{-1}DP$.
En caso de no ser diagonalizable, hallar su forma canónica de Jordan.

---

4. Teorema de Cayley-Hamilton

El objetivo de esta sección es mostrar que un operador T o una matriz A verifican su polinomio característico χ_T o χ_A.
Esto significa que, ya sea el operador $\chi_T(T)$ es el operador nulo o que la matriz $\chi_A(A)$ es la matriz nula.

Para el caso en que la matriz es diagonalizable, el teorema se deduce del siguiente resultado.

Lema 78. *Sea $T : V \to V$ un operador , λ un valor propio, v un vector propio asociado a λ y $P(x)$ un polinomio. Entonces se cumple que el vector v es vector propio del operador $P(T)$ con valor propio $P(\lambda)$.*

Demostración: Se deja a cargo del lector.

Corolario 79. *Sean $P(x) = \chi_T(x)$ el polinomio característico de T, μ un valor propio y v un vector asociado a μ. Entonces*

$$\chi_T(T)(v) = 0.$$

Demostración: Se cumple por:

$$\chi_T(T)(v) = \chi_T(\mu)v = 0v.$$

□

EJERCICIO Mostrar el teorema de Cayley-Hamilton para operadores diagonalizables. Sugerencia: Considerar una base formada por vectores propios y utilizar el resultado anterior.

Para transformaciones no diagonalizables hay que tener más cuidado. Podemos observar que si μ es valor propio, el polinomio característico se factoriza como

$$\chi_T(x) = (x - \mu)P(x).$$

Por lo tanto $\chi_T(T) = (T - \mu Id)P(T) = P(T)(T - \mu Id)$. Recordando que v es vector propio asociado a μ, tenemos

$$\chi_T(T)(v) = P(T)(Tv - \mu v) = 0.$$

Cuando v no es vector propio debemos proceder de otra manera. El siguiente resultado nos lleva en esa dirección.

Lema 80. *Dados un operador T en V y v un vector no nulo en V. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ que cumple que*

$$\begin{array}{ll} \{v, T(v), \ldots, T^k(v)\}, & \textit{es linealmente independiente,} \\ \{v, T(v), \ldots, T^k(v), T^{k+1}(v)\}, & \textit{es linealmente dependiente.} \end{array}$$

<u>Demostración:</u> Sea n la dimensión de V, por lo tanto el conjunto

$$\{v, T(v), \ldots, T^n(v)\} \text{ es linealmente dependiente.}$$

Como el vector v es no nulo, el conjunto $\{v\}$ es l.i.
Por el principio de buena ordenación [1], existe $k \geq 0$ mínimo tal que el conjunto

$$\{v, T(v), \ldots, T^k(v)\}, \text{ es linealmente dependiente.}$$

$\square$

Definición 81. *Notamos con $[v]_T$ al subespacio generado por*

$$\{v, Tv, \ldots T^n v\}.$$

Ejercicio: Sea k el número hallado en el lema anterior. Mostrar que $[v]_T$ está generado por

$$\{v, T(v), \ldots, T^k(v)\}.$$

---

[1]Un *orden total* en un conjunto C es una relacin "$\leq$" en $C \times C$ tal que: i) $x \leq x$ (reflexiva), ii) $x \leq y$ e $y \leq x$ implica que $x = y$(anitsimtrica), iii) $x \leq y$ e $y \leq z$ implica que $x \leq z$ (transitiva) y iv)dados x e y se cumple que $x \leq y$ $y \leq x$(tricotoma)
El *principio de buena ordenacin* establece que en todo conjunto se puede definir un orden total tal que todo subconjunto no vaco tiene un mnimo

Lema 82. *Sea $T^{k+1}(v) = \sum_{i=0}^{k} a_i T^i(v)$. El subespacio $[v]_T$ es invariante por T y la matriz asociada a T en la base $\{v, Tv, \ldots, T^k v\}$ del subespacio es:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_k \end{pmatrix}.$$

Demostración: Ejercicio para el lector.

Teorema 83. *Cayley-Hamilton Sean $T : V \to V$ un operador en un espacio de dimensión finita V y $\chi_T(x)$ el polinomio característico de T. Entonces el operador $\chi_T(T)$ es el operador nulo.*

Demostración:
Debemos mostrar que para todo $v \in V$ se cumple que

$$\chi_T(T)(v) = 0.$$

Si $v = 0$ se cumple porque $\chi_T(T)$ es una transformacin lineal. Sea $v \neq 0$, donde $[v]_T = \{v, Tv, \ldots, T^k v\}$; o sea, $\dim [v]_T = k + 1$. Completamos el conjunto $\{v, Tv, \ldots, T^k v\}$ para obtener una base $\mathcal{B}$ de V. La matriz asociada a T en esta base tiene la forma

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

donde A es de la forma establecida en el lema anterior.

Tenemos que

$$\begin{aligned} \chi_T(\lambda) &= \det({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} - \lambda I) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} A - \lambda I & C \\ \hline 0 & D - \lambda I \end{array}\right) \\ &= \det(A - \lambda I) \det(D - \lambda I). \end{aligned}$$

Si llamamos $P(\lambda)$ al polinomio $\det(D - \lambda I)$ resulta

$$\chi_T(\lambda) = P(\lambda) \det(A - \lambda I).$$

Cuando miramos $\det(A-\lambda I)$, desarrollando por la última columna se cumple que

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & a_k-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-1)^k(a_0 + a_1\lambda + \dots a_k\lambda^k - \lambda^{k+1}).
\end{aligned}$$

Se tiene entonces que

$$\chi_T(T) = P(T)[(-Id)^k(a_0 Id + a_1 T + \dots + a_k T^k - T^{k+1})].$$

Por lo tanto

$$\chi_T(T)(v) = P(T)[(-Id)^k(a_0 Id + a_1 T + \dots a_k T^k - T^{k+1})(v)] = P(T)(-Id)^k(0) = 0.$$

$\square$

Para obtener el correspondiente teorema para matrices basta considerar la transformación asociada a la matriz en $\mathbb{K}^n$.

CAPíTULO 4

Producto interno y norma

1. Producto interno

Trabajaremos con $\mathbb{K}$ el cuerpo de los reales o los complejos.

Definición 84 (Producto interno)**.** *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, una función de dos variables*

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$$

*es un **producto interno** en V si verifica:*

1. $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \quad \forall u, v, w \in V.$
2. $\langle au, v\rangle = a\langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in V\ ,\ \forall a \in \mathbb{K}.$
3. $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle} \quad \forall u, v \in V$*, la barra indica el complejo conjugado.*
4. $\langle u, u\rangle$ *real y* $\langle u, u\rangle\ \geq 0 \quad \forall u \in V$ *y* $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Observaciones 1.

Observación 85. *La propiedad 1, dice que la función $\langle , \rangle$ es aditiva en la primera componente (se sobrentiende que la segunda componente permanece fija).*

Observación 86. *La propiedad 2, dice que la función $\langle\ ,\ \rangle$ es homogénea en la primera componente (se sobrentiende que la segunda componente permanece fija). Cuando se cumplen las propiedades 1 y 2, se dice que la función $\langle , \rangle$ es <u>lineal en la primera componente</u>.*

Observación 87. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la propiedad 3 se reduce a $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle\ \forall\, u, v \in V$*

Observación 88. *Si $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno en el $\mathbb{K}$-espacio vectorial V se tiene que:*

a) $\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle \quad \forall u, v, w \in V$
b) $\langle u, av\rangle = \overline{a}\langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in V\ ,\ \forall a \in \mathbb{K}$
c) $\langle u, \vec{0}\rangle = \langle \vec{0}, u\rangle = 0 \quad \forall u \in V$

<u>*Demostración*</u>:

a) $\langle u, v+w\rangle = \overline{\langle v+w, u\rangle} = \overline{\langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle} = \overline{\langle v, u\rangle} + \overline{\langle w, u\rangle} =$
$\langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$

b) $\langle u, av\rangle = \overline{\langle av, u\rangle} = \overline{a\langle v, u\rangle} = \overline{a}\overline{\langle v, u\rangle} = \overline{a}\langle u, v\rangle$

c) $\langle u, \vec{0}\rangle = \langle u, 0.u\rangle = \overline{0}.\langle u, u\rangle = 0.\langle u, u\rangle = 0$ $\langle \vec{0}, u\rangle = \langle 0.u, u\rangle = 0.\langle u, u\rangle = 0$

Ejemplos 89.

Ejemplo 90. *Producto escalar en el espacio ordinario, sea* $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dado por:*

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i,$$

donde $u = (u_1, ..., u_n)$ *y* $v = (v_1, ..., v_n)$. *Es un producto interno en* $\mathbb{R}^n$, *llamado producto interno habitual en* $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 91. $\langle , \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *dado por* $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i}$, *donde* $u = (u_1, ..., u_n)$ *y* $v = (v_1, ..., v_n)$. *Es un producto interno en* $\mathbb{C}^n$ *llamado producto interno habitual en* $\mathbb{C}^n$.

Ejemplo 92. *Dado* $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *tal que* f *es continua*$\}$, *consideramos*
$\langle\ ,\ \rangle : C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R}$, *definido por*

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\ dt,$$

es un producto interno en $C[0,1]$.

Ejemplo 93. *Si* $\mathcal{R}[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *tal que* f *es integrable Riemann*$\}$, $\mathcal{R}[0,1]$ *es un espacio vectorial real.* $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{R}[0,1] \times \mathcal{R}[0,1] \to \mathbb{R}$ *definido como en el ejemplo anterior no es un producto interno porque no se verifica la propiedad iv).*
Si consideramos $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 1/2, \\ 0 & \forall x \in [0,1] - \{1/2\} \end{cases}$$

se tiene que $f \neq 0$ *pero* $\langle f, f\rangle = \int_0^1 f^2(t)\ dt = 0$.

2. Norma

Definición 94. *Sea V un espacio vectorial. Una* ***norma*** *en V es una función tal que a cada vector v le hace corresponder un* ***real*** *indicado como $\|v\|$, y cumple:*

1. $\|\lambda v\| = |\lambda| \; \|v\| \;\; \forall \lambda \in K, \forall v \in V$,
2. $\|v\| \geq 0 \;\; \forall v \in V; \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$,
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *("desigualdad triangular").*

Un espacio vectorial normado es un espacio vectorial en el que se definió una norma.

Ejemplos 95.

Ejemplo 96. *Ejemplos de normas en $\mathbb{R}^n$:*

1. $\|(a_1, ..., a_n)\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{1/p}$, $p \in \mathbb{N}$. *Cuando $p \neq 2$, la propiedad triangular no es fácil de probar.*
2. $\|(a_1, ..., a_n)\|_\infty = max\{|a_i|\}$.

Ejemplo 97. *Ejemplos de normas en $\mathbf{C}[a, b]$ (espacio de las funciones reales continuas en $[a, b]$) :*

1. $\|f\|_p = (\int_a^b |f(t)|^p \; dt)^{1/p}$. *Cuando $p > 2$, la propiedad triangular no es fácil de probar.*
2. $\|f\|_\infty = max\{|f(x)|, \; a \leq x \leq b\}$.

Teorema 98. *Todo espacio vectorial con producto interno es un espacio vectorial normado definiendo la norma de la siguiente manera:*

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

A esta norma la llamamos ***norma inducida*** *por el producto interno.*

Demostración:

Para demostrar el teorema debemos probar que la aplicación $|| \; ||$ es efectivamente una norma o sea que verifica:

1. $||v|| \geq 0 \, \forall v \in V$ y $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$;
2. $||av|| = |a| ||v|| \, \forall a \in \mathbb{K}, \, v \in V$;
3. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v|| \, \forall u, v \in V$ ("desigualdad triangular").

Las demostraciones de (1) y (2) son simples a partir de las propiedades del producto interno y se dejan como ejercicio. La tercera propiedad de las normas, la "desigualdad triangular", se demostrará más adelante. □

Observación 99. *El recíproco* ***no*** *es cierto, o sea hay normas que no son normas inducidas por ningún producto interno en V.*

Esta situación nos lleva a hacernos la siguiente pregunta: ¿qué condición que cumpla una norma nos asegura que sea una norma inducida por algún producto interno?
En el práctico(ej 66) se prueba que una norma inducida por un producto interno cumple la regla del paralelogramo:

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 \qquad \forall\, v, w \in V$$

y aquí sí se cumple el recíproco. Esto es conocido como el teorema de Jordan - Von Neumann; o sea, que toda norma que cumple la regla del paralelogramo deriva de un producto interno. La demostración de esta propiedad está más allá del alcance de este curso.

Observaciones 2.

Observación 100. *De los ejemplos 95, solo $\|\ \|_2$ deriva de un producto interno.*

Observación 101. *En el caso en que se considere el espacio ordinario, la norma de un vector referida al producto escalar coincide con su módulo.*

Teorema 102 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Sea V un espacio con producto interno, para todo par de vectores $v, u \in V$ se tiene*

$$|\langle v, u\rangle| \leq \|v\|\,\|u\|,$$

donde la norma es la inducida por el producto interno. La igualdad vale si y sólo si $\{v, u\}$ es L.D.

<u>Demostración</u>:
Tenemos que $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ y u, $v \in V$, se cumple $||v-\alpha u||^2 \geq 0$.

$$\begin{aligned} ||v-\alpha u||^2 &= \langle v-\alpha u, v-\alpha u\rangle \\ &= ||v||^2 - \alpha\langle u, v\rangle - \overline{\alpha}\langle v, u\rangle + |\alpha|^2||u||^2 \\ &= ||v||^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha\langle u, v\rangle) + |\alpha|^2||u||^2 \geq 0\ \forall \alpha \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Elegimos un número complejo z de módulo 1 con $z\langle u, v\rangle = |\langle u, v\rangle|$. Tomando $\alpha = tz$, deducimos que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \|v\|^2 - 2|\langle u, v\rangle| t + \|u\|^2 t^2.$$

Si u, v son l.i. la desigualdad es estricta. Eso solo puede pasar si el polinomio de segundo grado en t cumple:

$$4|\langle x, y\rangle|^2 - 4||x||^2||y||^2 < 0,$$

de donde se obtiene la conclusión buscada. $\square$

Observación 103. *Si V es un espacio vectorial* <u>*real*</u> *con producto interno, y v y w son dos vectores no nulos, la desigualdad de Cauchy-Schwarz permite asegurar que*

$$-1 \leq \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \ \|w\|} \leq 1,$$

por ello se define el **ángulo α entre los vectores** *v* **y** *w dado por* $\cos\alpha = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\| \ \|w\|}$

Observación 104. *Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz al producto interno*
$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ *en $\mathbb{R}^n$ se prueba que:*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

y que la igualdad vale si y sólo si $\{(x_1, ..., x_n) \ (y_1, ..., y_n)\}$ es L.D.

Observación 105. *Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz al producto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t) \ dt$ en $C[0,1]$, se prueba que para cualquier $f, g \in C[0,1]$ se cumple que*

$$\left(\int_0^1 f(t)g(t) \ dt\right)^2 \leq \int_0^1 f^2(t) \ dt \ \int_0^1 g^2(t) \ dt$$

y la igualdad vale si y sólo si $\{f, g\}$ es L.D.

Corolario 106 (Desigualdad triangular)**.** *Si V es un espacio con producto interno $v, w \in V$, se tiene $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.*

<u>Demostración</u>:

$$\begin{array}{rcl} \|v+w\|^2 & = & \langle v+w, v+w\rangle \\ & = & \|v\|^2 + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \|w\|^2 \\ & = & \|v\|^2 + \langle v,w\rangle + \overline{\langle v,w\rangle} + \|w\|^2 \\ & = & \|v\|^2 + 2Re(\langle v,w\rangle) + \|w\|^2 \\ & \overset{re<||}{\leq} & \|v\|^2 + 2|\langle v,w\rangle| + \|w\|^2 \\ & \overset{desig.C-S}{\leq} & \|v\|^2 + 2\|v\|\ \|w\| + \|w\|^2 \\ & = & (\|v\|+\|w\|)^2. \end{array}$$

Juntando ambas puntas de la desigualdad se cumple:

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

□

Observación 107. *La igualdad se cumple cuando vale la igualdad de Cauchy-Schwartz ;o sea v y w colineales.*
Generalización: $\left\|\sum_{i=1}^{n} v_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|$ *y la igualdad se da cuando todos los vectores son colineales.*

---

3. EJERCICIOS: Producto interno. Espacios normados

EJERCICIO 62. *En cada caso, probar que $\langle , \rangle : V \times V \to K$ es un producto interno en V,*

1. $V = I\!R^3$, $\mathbb{K} = I\!R$
   $\langle (x,y,z),(x',y',z')\rangle = xx' + 2yy' + 3zz'$
2. $V = M\,(I\!R)_{n\times n}$, $\mathbb{K} = I\!R$
   $\langle A,B\rangle = tr\,(B^t A)\,.$
   ¿Cómo ajustaría este producto interno para que funcione para las matrices complejas?
3. $V = \mathbb{C}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
   Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, entonces $\langle X,Y\rangle = X^t A \overline{Y}$ (Observe que X^t es un vector fila e $\overline{Y}$ es el vector columna conjugado de Y) donde $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 63. *En cada caso, probar que* $\langle , \rangle : V \times V \to K$ *no es un producto interno en* V

1. $V = \mathcal{P}_3$, $\mathbb{K} = I\!R$
   $\langle p, q \rangle = p(1)q(1)$
2. $V = I\!R^2$, $\mathbb{K} = I\!R$
   $\langle (x, y), (x', y') \rangle = x\,|x'| + y\,|y'|$
3. $V = M\,(I\!R)_{n \times n}$, $\mathbb{K} = I\!R$
   $\langle A, B \rangle = tr\,(A + B)$.

Ejercicio 64. *Indicar si las siguientes afirmaciones sobre un espacio vectorial con producto interno son verdaderas o falsas.*

1. Un producto interno es lineal en ambas componentes
2. $\langle v_1 + v_2, w_1 + w_2 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_2, w_2 \rangle \;\; \forall \;\; v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$
3. Si $\langle v, w \rangle = 0 \;\; \forall \;\; w \in V$, entonces $v = \vec{0}$

Ejercicio 65. *Sea* $\langle \, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *un producto interno cualquiera.*

1. Probar que:
$$\begin{array}{rcl} \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle & = & a_{11}x_1y_1 + ... + a_{1n}x_1y_n \\ & & +a_{21}x_2y_1 + ... + a_{2n}x_2y_n \\ & & \vdots \\ & & +a_{n1}x_ny_1 + ... + a_{nn}x_ny_n \end{array}$$
   siendo $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$ y $a_{ij} \in \mathbb{R} \;\; \forall \, i, j = 1, ..., n$
   Concluir que $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \vec{X}^t A \vec{Y}$ con $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n \times n}$
2. Indicar las propiedades de la matriz A (observar que estas propiedades hacen que $\vec{X}^t A \vec{Y}$ sea un producto interno).
3. ¿Cuál producto interno se define si se considera que A es la matriz identidad?
4. Generalizar el planteo anterior para cualquier espacio vectorial real.
5. Generalizar el planteo anterior para $\mathbb{C}^n$ y para cualquier espacio vectorial complejo.

Ejercicio 66. *Sea V un espacio vectorial real con producto interno y $\| \quad \| : V \to \mathbb{R}$ la norma generada por él.*

1. Probar que

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 \qquad \forall\, v, w \in V. \quad (\textit{Regla del paralelogramo})$$

2. Probar que

$$4\langle v, w\rangle = \|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 \qquad \forall\, v, w \in V. \quad (\textit{Polarización}).$$

3. Analice cuál de las dos propiedades anteriores sigue valiendo en un espacio vectorial complejo.

Ejercicio 67.

Sea $V = \mathbb{C}^3$ con el producto interno habitual. Se consideran los vectores $v = (2, 1+i, i)$ y $w = (2-i, 2, 1+2i)$. Calcular $\langle v, w\rangle$, $\|v\|^2$, $\|w\|^2$ y $\|v+w\|^2$. Verificar la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad triangular para estos vectores.

---

4. Ortogonalidad y ortonormalidad

Definición 108. *Sea V un espacio vectorial con producto interno. Dados $v, w \in V$, se dice que v y w son* ***ortogonales****, y se escribe $v \perp w$, cuando $\langle v, w\rangle = 0$.*

Esta definición coincide con la ortogonalidad en el espacio ordinario, trabajando con el producto interno usual.

Definición 109. *Sea $A \subset V$. Se dice que A es un* ***conjunto ortogonal*** *si los elementos de A son ortogonales dos a dos , o sea*

$$\forall\, v,\ w\ \in A,\ v \neq w \textit{ se cumple } v \perp w.$$

Si además $\|v\| = 1\ \forall v \in A$ se dice que A es un ***conjunto ortonormal****.*

Observaciones 3.

Observación 110. $\vec{0} \perp v\ \ \forall v \in V$.

Observación 111. $v \perp v \ \Leftrightarrow v = \vec{0}$.

Observación 112. *Si A es un conjunto ortogonal y $\vec{0} \notin A$ el conjunto:*

$$\left\{ \frac{1}{\|v\|} v /\ v \in A \right\}$$

es ortonormal. A este proceso se le llama normalizar.

Ejemplo 113. *Si se considera $\mathbb{R}^n$ con el producto interno habitual, la base canónica $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, donde*

$$e_i = (0, 0, ..., \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{lugar } i}}{1}, ..., 0)$$

es un conjunto ortonormal.

Teorema 114. *Todo conjunto ortogonal que no tiene el vector nulo es L.I. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno y $\{v_1, ..., v_r\}$ un conjunto ortogonal tal que $v_i \neq \vec{0}$ con $i = 1, ..., r$. Entonces $\{v_1, ..., v_r\}$ es L.I.*

Demostración: Sean $a_1, ..., a_r \in \mathbb{K}$ tales que $a_1v_1 + ... + a_rv_r = \vec{0}$.
Entonces $\forall j = 1, ..., r$ se cumple:

$$0 = \langle \sum_{i=1}^{r} a_i v_i \ , \ v_j \rangle = \sum_{i=1}^{r} a_i \langle v_i, v_j \rangle = a_j \langle v_j, v_j \rangle = a_j \|v_j\|^2 \Rightarrow a_j = 0,$$

por lo tanto $\{v_1, ..., v_r\}$ es L.I. □

Teorema 115 (Pitágoras)**.** *Sea V un espacio con producto interno y $\{v_1, ..., v_r\}$ un conjunto ortogonal. Entonces $\left\| \sum\limits_{i=1}^{r} v_i \right\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{r} \|v_i\|^2$*

Demostración:

$$|| \textstyle\sum_{i=1}^r v_i||^2 = \langle \sum_{i=1}^r v_i, \sum_{j=1}^r v_j \rangle = \sum_{i,j=1}^r \langle v_i, v_j \rangle \underset{\uparrow \ \langle v_i, v_j \rangle, \text{ si } i \neq j}{=} \sum_{i=1}^r \langle v_i, v_i \rangle = \sum_{i=1}^r ||v_i||^2.$$

□

El ejemplo 113 muestra que $\mathbb{R}^n$, con el producto interno habitual tiene una base ortonormal. El siguiente teorema prueba que este resultado vale en cualquier espacio de dimensión finita con producto interno y da un método para construir una base ortonormal.

Teorema 116 (Método de ortonormalización de Gram-Schmidt)**.** *Sean V un espacio vectorial con producto interno y $\{v_1, ..., v_n\}$ una base de V. Entonces existe $B = \{y_1, ..., y_n\}$ tal que B es una base ortonormal de V y $[v_1, ..., v_k] = [y_1, ..., y_k]$ $\forall k = 1, ..., n$.*

Demostración: Tomamos $u_1 = v_1$, entonces $[v_1] = [u_1]$.
Sea $u_2 = v_2 - cu_1$ donde

$$c = \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle}.$$

Entonces $[v_1, v_2] = [u_1, u_2]$ y

$$\begin{aligned} \langle u_2, u_1 \rangle &= \langle v_2 - cu_1, u_1 \rangle \\ &= \langle v_2, u_1 \rangle - c\langle u_1, u_1 \rangle \\ &= \langle v_2, u_1 \rangle - \tfrac{\langle v_2,u_1\rangle\langle u_1,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle} = 0. \end{aligned}$$

Si se sigue este proceso tomando:

$$u_k = v_k - c_{k-1}u_{k-1} - c_{k-2}u_{k-2} - ... - c_1u_1,$$

donde $c_j = \frac{\langle v_k,u_j\rangle}{\langle u_j,u_j\rangle}$ $k = 2, ..., n$ se obtiene un sistema $\{u_1, ..., u_n\}$ ortogonal tal que: $[u_1, ..., u_k] = [v_1, ..., v_k]$ $\forall k = 1, ..., n$.
Tomando $y_j = \frac{1}{\|u_j\|}u_j$ se tiene que $B = \{y_1, ..., y_n\}$ está en las condiciones enunciadas.

$\square$

Corolario 117. *Todo espacio vectorial de dimensión finita con producto interno tiene una base ortonormal.*

Corolario 118. *Este método es aplicable también a subespacios vectoriales (un subespacio vectorial es en si un espacio vectorial).*

Ejemplo 119. *Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores*

$$v_1 = (\sqrt{3}, 2, 3) \text{ y } v_2 = (0, 2, 4).$$

Entonces $\{u_1, u_2\}$ es una base ortogonal de S, donde:

$$u_1 = v_1 \text{ y } u_2 = v_2 - \frac{\langle (0,2,4); (\sqrt{3},2,3)\rangle}{\left\|(\sqrt{3},2,3)\right\|^2}u_1$$

entonces:

$$\begin{aligned} &u_2 = (0,2,4) - (\sqrt{3},2,3) = (-\sqrt{3},0,1) \text{ y} \\ &\left\{\tfrac{1}{\|u_1\|}u_1, \tfrac{1}{\|u_2\|}u_2\right\} = \left\{(\tfrac{\sqrt{3}}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}); (\tfrac{-\sqrt{3}}{2}, 0, \tfrac{1}{2})\right\} \end{aligned}$$

es una base ortonormal de S.

Ejemplo 120. *Sea S el subespacio de $C[0,1]$ generado por $\{f_1, f_2, f_3\}$ donde*

$$f_1(t) = 1,\ f_2(t) = t,\ f_3(t) = e^t,$$

con el producto interno dado por

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Una base ortogonal de S es $\{u_1, u_2, u_3\}$ donde:

$$u_1 = f_1 \Rightarrow u_1(t) = 1$$

$$u_2 = f_2 - \frac{\langle f_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 \Rightarrow u_2(t) = t - 1/2$$

$$u_3 = f_3 - \frac{\langle f_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 - \frac{\langle f_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 \Rightarrow u_3(t) = e^t - 3(1-e)(2t-1) - (e-1)$$

Teorema 121 (Propiedades de las bases ortonormales)**.** *Sea V un espacio vectorial con producto interno y $\{v_1, ..., v_n\}$ una base ortonormal.*
Entonces:

i) Si $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ y $w = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i v_i$ entonces $\langle v, w \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i}$.

ii) $\forall\, v \in V$ se tiene que: $v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + ... + \langle v, v_n \rangle v_n$.

iii) $\forall\, v \in V$ se tiene que: $\|v\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} |\langle v, v_i \rangle|^2$.

Demostración i):

Aplicar linealidad respecto de la primero y segunda componente del producto interno y luego de sacar las constantes fuera de cada producto observar que $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $i \neq j$ y 1 si $i = j$.

Demostración ii):

Sea $v \in V \Rightarrow \exists a_1, ..., a_n \in K$ tales que $v = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i$.

Entonces $\langle v, v_j \rangle = \langle \sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i, v_j \rangle = a_j$, probando ii).

Demostración iii):

Como el conjunto $\{a_1 v_1, ..., a_n v_n\}$ es ortogonal, aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$\|v\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|a_i v_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \|v_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle v, v_i \rangle|^2.$$

$\square$

5. EJERCICIOS: Conjuntos ortogonales y ortonormales

EJERCICIO 68. *En un espacio vectorial real con producto interno y considerando su norma inducida, probar que si* $v+w$ *y* $v-w$ *son ortogonales entonces* v *y* w *tienen la misma norma.*

EJERCICIO 69. *Sea* V *un espacio vectorial real con producto interno.*

Probar que si u *y* v *son ortogonales, entonces* $\|u+\lambda v\| \geq \|u\| \;\; \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

EJERCICIO 70. *Se considera* $\mathbb{R}^4$ *con el producto interno habitual.*
Hallar un base ortonormal del subespacio $S = [(1,1,0,0),(1,1,1,1),(-1,0,2,1)]$.

EJERCICIO 71. *Se considera* $\mathbb{C}^3$ *con el producto interno habitual.*
Hallar un base ortonormal del subespacio $S = [(1,i,0),(1,1,1)]$.

EJERCICIO 72. *Sea* $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{m\times n}$. *Probar que si las columnas de* A *forman un conjunto ortonormal de vectores de* $\mathbb{R}^m$ *con el producto interno habitual, entonces* $A^tA = Id_{n\times n}$.

EJERCICIO 73. *Sea* $\{v_1,...,v_n\}$ *una base de* V, *espacio vectorial real con producto interno.*

Si se cumple que $\langle w,w\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \quad \forall w = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in V$, *probar que* $\{v_1,...,v_n\}$ *una base ortonormal de* V

EJERCICIO 74. *En un espacio vectorial con producto interno y considerando su norma inducida, probar que si* $\{u_1,...,u_n\}$ *es una base ortogonal, entonces*

1. $v = \frac{\langle v,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 + ... + \frac{\langle v,u_n\rangle}{\|u_n\|^2}u_n$
2. $\langle v,w\rangle = \frac{\langle v,u_1\rangle\langle u_1,w\rangle}{\|u_1\|^2} + ... + \frac{\langle v,u_n\rangle\langle u_n,w\rangle}{\|u_n\|^2}$

6. Complemento ortogonal

Definición 122 (Complemento ortogonal)**.** *Sea V un espacio vectorial con producto interno, $S \subset V$. Llamamos* ***complemento ortogonal de*** *S al conjunto*

$$\begin{aligned} S^{\perp} &= \{v \in V \;:\; v \perp s \;\forall\; s \in S\} \\ &= \{v \in V \;:\; \langle v, s\rangle = 0 \;\forall\; s \in S\}. \end{aligned}$$

Note que no se pide que S sea un subespacio vectorial de V.

Ejemplos 123.

Ejemplo 124. *En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual, sea $S = \{(1,1,1)\}$.*
El complemento ortogonal de S es:

$$\begin{aligned} S^{\perp} &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \langle (x,y,z),(1,1,1)\rangle = 0\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z = 0\right\} \\ &= \{(x,y,-x-y) \text{ con } x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1,0,-1),(0,1,-1)] \text{ (subespacio generado por los dos vectores).} \end{aligned}$$

Ejemplo 125. *Sea $V = C[0,1] \quad S = \{f\}$ donde $f(t) = 1 \;\forall\, t \in [0,1]$.*
El complemento ortogonal de S es:

$$\begin{aligned} S^{\perp} &= \{g \in C[0,1] / \langle f, g\rangle = 0\} \\ &= \left\{g \in C[0,1] / \int_0^1 g(t)\; dt = 0\right\}. \end{aligned}$$

Proposición 126. *Sea V un espacio vectorial con producto interno y S un subconjunto de V. Entonces $S^{\perp}$ es un subespacio vectorial de V.*

Demostración:
El conjunto $S^{\perp}$ no es vacío ya que $\vec{0} \in S^{\perp}$. Si $v,\ w \in S^{\perp}$ entonces

$$\begin{aligned} &\langle v+w, s\rangle = \langle v,s\rangle + \langle w,s\rangle = 0 \;\forall s \in S \Rightarrow v+w \in S^{\perp}, \\ &a \in K,\ \langle av, s\rangle = a\langle v, s\rangle = 0 \;\forall s \in S \Rightarrow av \in S^{\perp}. \end{aligned}$$

□

Observar que para que $S^{\perp}$ sea un subespacio vectorial de V no es necesario que S lo sea.

Proposición 127. *Si V es un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y $B = \{s_1, s_2, \cdots, s_r\}$ es una base de un subespacio S entonces $v \in S^{\perp} \quad \Leftrightarrow$ $v \perp s_i \;\forall\, i = 1,2,\cdots,r$.*

Demostración:

El directo es inmediato pues los vectores de $S^{\perp}$ son ortogonales a todos los vectores de S, en particular a los $s_i \ \forall\, i = 1, 2, \cdots, r$.

Para demostrar el recíproco, un vector cualquiera de S se escribe como combinación lineal $s = a_1 s_1 + ... + a_r s_r$. Si w es un vector que cumple $\langle w, s_i \rangle = 0 \ \ \forall\, i = 1, 2, \cdots, r$ (esta es la hipótesis), aplicando las propiedades del producto interno se tiene

$$\langle w, s \rangle = \langle w, a_1 s_1 + ... + a_r s_r \rangle = a_1 \langle w, s_1 \rangle + ... + a_r \langle w, s_r \rangle = 0$$

y por lo tanto $w \in S^{\perp}$.

$\square$

Ejemplo 128. *En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual, sea*

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \right\}.$$

Los vectores $B = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ forman una base de S. El complemento ortogonal de S es

$$\begin{aligned} S^{\perp} &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \langle (x, y, z), (1, 0, -1) \rangle = 0 \text{ y } \langle (x, y, z), (0, 1, -1) \rangle = 0 \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - z = 0 \text{ y } y - z = 0 \right\} \\ &= \{ (z, z, z) \text{ con } x, y \in \mathbb{R} \} \\ &= [(1, 1, 1)] \ . \end{aligned}$$

Resuelva este mismo problema utilizando geometría.

Proposición 129. *Sea V un espacio vectorial con producto interno y S un subespacio vectorial de dimensión finita. Entonces $V = S \oplus S^{\perp}$.*

Demostración:

Hay que probar que $V = S + S^{\perp}$ y que $S \cap S^{\perp} = \left\{ \vec{0} \right\}$. Sea $\{s_1, ..., s_k\}$ base ortonormal de S.

Consideremos un vector $v \in V$ y definimos $v_s = \sum\limits_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle \ s_i \in S$. Si probamos que $v - v_s \in S^{\perp}$, está probado que $V = S + S^{\perp}$ pues

$$\begin{array}{ccccc} v & = & (v - v_s) & + & v_s. \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \in S^{\perp} & & \in S \end{array}$$

Para ver que $v - v_s \in S^{\perp}$,

$$\begin{aligned}
\langle v - v_s, s_j \rangle &= \left\langle v - \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle \; s_i, s_j \right\rangle \\
&= \langle v, s_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle \langle s_i, s_j \rangle \\
&= \langle v, s_j \rangle - \langle v, s_j \rangle \langle s_j, s_j \rangle \\
&= \langle v, s_j \rangle - \langle v, s_j \rangle = 0 \;\; \forall \;\; j = 1, 2, ..., k.
\end{aligned}$$

Por la proposición anterior podemos concluir lo que queriamos. Por otra parte, si $v \in S \cap S^{\perp}$, entonces $v \perp v \Rightarrow v = \vec{0}$ (ver observación 111). Así queda probado que $S \cap S^{\perp} = \left\{ \vec{0} \right\}$.

$\square$

---

7. EJERCICIOS: Complemento ortogonal

EJERCICIO 75. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno.*

1. Sean A y B subconjuntos de V. Probar que:
   a) Si $A \subset B \quad \Rightarrow \quad B^{\perp} \subset A^{\perp}$
   b) $A^{\perp} = [A]^{\perp}$
   c) $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$
2. Sean S y W subespacios de V. Probar que:
   a) $S = (S^{\perp})^{\perp}$
   b) $(S + W)^{\perp} = S^{\perp} \cap W^{\perp}$
   c) $(S \cap W)^{\perp} = S^{\perp} + W^{\perp}$
3. Interprete geométricamente los resultados anteriores

EJERCICIO 76. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y $A = \{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ un generador de un subespacio S.*

1. Probar que: $v \in S^{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad v \perp s_i \;\; \forall \, i = 1, 2, \cdots, k$
2. ¿Cuál es la mínima cantidad de condiciones que debe plantear para hallar $S^{\perp}$?, ¿En qué circunstancias?.

EJERCICIO 77. *Se considera en $\mathbb{C}^3$ con el producto interno habitual el subespacio $S = [(i, 0, 1)]$. Hallar un base del subespacio $S^{\perp}$.*

EJERCICIO 78. *Se consideran el espacio* $\mathbb{R}^3$ *con el producto interno definido por*

$$\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

donde $x = (x_1, x_2, x_3)$ *e* $y = (y_1, y_2, y_3)$, *y el subespacio* S *generado por el vector* $(1, 1, 1)$.

Una **base ortogonal** de $S^\perp$ (el complemento ortogonal de S) es:

(6) $\{(3, -4, 1),\ (1, 1, -2)\}$.

(7) $\{(1, 0, 1),\ (-1, 0, 1)\}$.

(8) $\{(0, 1, -1)\ (-1, 1, 1)\}$.

(9) $\{(2, -1, -1),\ (0, 1, -1)\}$.

(10) $\{(-1, 0, 2),\ (2, -5, 1)\}$.

EJERCICIO 79. *Sea* $\mathcal{M}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ *con el producto interno :* $\langle A, B\rangle = tr(B^tA)$.

1. Hallar una base ortonormal de $\mathcal{M}(\mathbb{R})_{2x2}$.
2. Sea $\mathcal{D}$ el subespacio de las matrices diagonales, hallar $\mathcal{D}^\perp$.
3. Sea $\mathcal{S}$ el subespacio de las matrices simétricas, hallar $\mathcal{S}^\perp$.

EJERCICIO 80. *Sea* V *un espacio vectorial y* $\langle\ ,\ \rangle_1$ *y* $\langle\ ,\ \rangle_2$ *dos productos internos definidos en él que verifican:*

$$\langle v, w\rangle_1 = 0 \ \Leftrightarrow\ \langle v, w\rangle_2 = 0\ \ \forall v, w \in V.$$

Dado S un subespacio vectorial de V llamamos W_1 al complemento ortogonal de S con el producto interno $\langle\ ,\ \rangle_1$ y W_2 al complemento ortogonal de S con el producto interno $\langle\ ,\ \rangle_2$.

1. Probar que $W_1 = W_2$.
2. Probar que si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\langle v_i, v_i\rangle_2 = k\langle v_i, v_i\rangle_1\ \ \forall i = 1, ..., n$, donde $\{v_1, ..., v_r\}$ es una base ortogonal de S y $\{v_{r+1}, ..., v_n\}$ es una base ortogonal de W_1, entonces
$$\langle v, w\rangle_2 = k\langle v, w\rangle_1\ \ \forall v, w \in V$$
3. Observar que para que la primer parte se cumpla alcanzaría con que
$$\langle v, w\rangle_1 = 0\ \Leftrightarrow\ \langle v, w\rangle_2 = 0\ \ \forall w \in S\ \ \forall v \in V$$
4. Ejemplificar las condiciones anteriores y verificar los resultados.

8. Proyección ortogonal

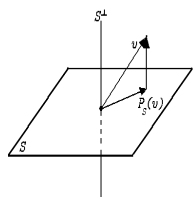
Sean V un espacio vectorial con producto interno, S un subespacio tal que $V = S \oplus S^{\perp}$. Eso implica que dado $v \in V$ existen y son únicos $v_S \in S$, $v_{S^\perp}$ tales que

$$v = v_S + v_{S^\perp}.$$

Definición 130. *Dado $v \in V$ llamamos **proyección ortogonal de v sobre el subespacio** S al vector $P_S(v) = v_S$.*

Si V tiene dimensión finita y $B_S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ es una base ortonormal de S, entonces

$$P_S(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle s_i;\ s_i \in S.$$



Analice la interpretación geométrica de la expresión que define la proyección.

Observación 131. *La definición de proyección ortogonal no depende de la base elegida.*

Como probamos en la proposición 129; $P_S(v)$ es el único vector de S tal que sumado con un vector de $S^\perp$ da v (recuerde esta propiedad de la suma directa que se probó).

Observación 132. *Como $V = S \oplus S^\perp$ podemos hallar la proyección, usando que la diferencia $v - s$ esté en $S^\perp$. Es más si se tiene una proyección, se tiene la proyección sobre el complemento ortogonal como lo indica la siguiente observación.*

Observación 133. *De la misma proposición 129 y observando que $(S^\perp)^\perp = S$ se desprende que:*

$$v = P_S(v) + P_{S^\perp}(v).$$

Teorema 134. *Sea V un espacio vectorial con producto interno y S un subespacio de dimensión finita.*
Entonces: $\|v - P_s(v)\| \leq \|v - s\| \ \forall s \in S$.

Demostración:
Utilizando la observación anterior:

$$\begin{aligned}
\|v-s\|^2 &= \langle v-s, v-s\rangle \\
&= \langle P_S(v) + P_{S^\perp}(v) - s, P_S(v) + P_{S^\perp}(v) - s\rangle \\
&= \langle P_{S^\perp}(v), P_{S^\perp}(v)\rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_S(v) - s\rangle \\
&\quad + \langle P_S(v) - s, P_{S^\perp}(v)\rangle + \langle P_S(v) - s, P_S(v) - s\rangle \\
&= \|P_{S^\perp}(v)\|^2 + \|P_S(v) - s\|^2 .
\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene: $\|v-s\|^2 = \|P_{S^\perp}(v)\|^2 + \|P_S(v) - s\|^2$

Como en la igualdad anterior el segundo miembro es un número fijo ($\|P_{S^\perp}(v)\|^2$) más un número positivo o cero ($\|P_S(v) - s\|^2$), el valor mínimo de $\|v - s\|$ con $s \in S$, se obtiene cuando el segundo sumando es cero o sea tomando $s = P_S(v)$. □

Observación 135. *El vector $P_s(v)$ es el vector de S que mejor se aproxima a v, en el sentido del teorema anterior. En el sentido de que hace mínima a $\|v - s\|$.*

---

9. Aplicación : Un acercamiento a las series de Fourier

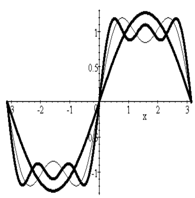
Sea la función $f : (-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi \\ -1 & \text{si} \quad -\pi \langle x \langle 0 \end{cases}$, en el espacio de las funciones con el producto interno $\langle h, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} h(t)g(t)\, dt$.
Buscaremos la mejor aproximación, en algún sentido, de la función f con funciones trigonométricas, para eso consideremos los subespacios S_i generados respectivamente por los A_i siguientes:

$A_1 = \{1, cos(x), sen(x)\}$
$A_2 = \{1, cos(x), sen(x), cos(2x), sen(2x)\}$
$\vdots$
$A_n = \{1, cos(x), sen(x), ..., cos(nx), sen(nx)\}$
$\vdots$
$A_\infty = \{cos(nx), sen(nx) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$

El significado de mejor será el mismo que el del teorema 4.1, es decir buscaremos el vector $u_i \in S_i$ que minimice $\|f - u_i\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}(f(t) - u_i(t))^2 \, dt}$.

El problema está resuelto, el vector u_i que estamos buscando es la proyección ortogonal de f en el subespacio S_i. Realizando los cálculos se obtiene:

$$\begin{aligned}
u_1 &= 0 \times 1 + 0cos(x) + \tfrac{4}{\pi}sen(x), \\
u_2 &= 0 \times 1 + 0cos(x) + \tfrac{4}{\pi}sen(x) + 0 \times cos(2x) + 0sen(2x), \\
u_3 &= 0 \times 1 + 0cos(x) + \tfrac{4}{\pi}sen(x) + 0cos(2x) + 0sen(2x) + 0cos(3x) + \tfrac{4}{\pi}\tfrac{1}{3}sen(3x), \\
&\vdots \\
u_\infty &= \tfrac{4}{\pi}\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{2k+1}sen((2k+1)x) \quad \underline{\text{Serie de Fourier de } f}
\end{aligned}$$



Observamos que a medida que agregamos más términos mejor es la aproximación. La serie de funciones (así se llama) obtenida con al final, ¿será igual a $f(x)$ para todo x?. La respuesta a esta pregunta no es tema de este curso pero adelantamos que para los x donde f es continua se cumple. Observe que donde f no es continua, en este caso no se cumple.

Observación 136.

- En esta aplicación se debe tener cuidado con cuál espacio vectorial se está trabajando. De esto dependerá si el producto interno definido realmente lo es. Para trabajar correctamente se debe considerar $V = [\{\{f(x)\} \cup A_\infty\}]$.

- Para calcular las proyecciones se utiliza las bases ortonormales obtenidas de aplicar Gram-Schmidt a los generadores indicados (se deja como ejercicio ver cuáles son).
- Observe que se puede extender a otras funciones si bien el ejemplo se realizó sobre un caso particular.

---

10. EJERCICIOS: Proyección ortogonal

Ejercicio 81 (Propiedades de la proyección ortogonal). *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, $S \subset V$ un subespacio vectorial y $P_S(v)$ la proyección ortogonal de v sobre S.*

Probar que:

1. $P_S(s) = s \ \forall s \in S$
2. $P_S(v) = \vec{0} \ \forall\, v \in S^{\perp}$
3. $||v||^2 = ||P_S(v)||^2 + ||P_{S^\perp}(v)||^2 \quad \forall v \in V$
4. $||P_S(v)|| \leq ||v||$
5. $\langle v, P_S(v)\rangle = ||P_S(v)||^2 \quad \forall v \in V$

Ejercicio 82 (Propiedades de la proyección ortogonal). *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, $S \subset V$ un subespacio vectorial y $P_S(v)$ la proyección ortogonal de v sobre S.*

Probar que:

1. $P_S : V \to V$ tal que $v \overset{P_S}{\to} P_S(v)$ es lineal.
2. Hallar la matriz asociada de P_S en una base construida juntando una base de S con una de $S^\perp$.
3. Hallar el núcleo y la imagen de P_S.
4. Hallar valores propios y subespacios propios de P_S, ¿Es P_S diagonalizable?.
5. $\langle v, P_S(w)\rangle = \langle P_S(v), w\rangle \quad \forall v, w \in V$ (Esta propiedad dice que la transformación lineal P_S es autoadjunta (en la tercer parte se trabaja con este tipo de transformaciones lineales).

Ejercicio 83. *En $\mathbb{R}^4$ con el producto interno habitual se considera el subespacio*

$$S = [(1, -1, 1, 1), (2, 1, 0, 3)]$$

hallar $P_S(x, y, z, t)$.

EJERCICIO 84. *Sea* $P_S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *la proyección ortogonal (con el producto interno habitual) sobre el plano* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$. *Hallar la matriz asociada a* P_S *en las bases canónicas de* $\mathbb{R}^3$.

EJERCICIO 85. *Probar que* $\langle , \rangle : \mathcal{P}_3 x \mathcal{P}_3 \rightarrow I\!R$ *tal que*

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\, dt$$

es un producto interno en $\mathcal{P}_3$

1. Hallar una base ortonormal del subespacio $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_3$
2. Hallar la proyección ortogonal del polinomio $p; p(t) = t^3$ sobre el subespacio $\mathcal{P}_2$.
3. Sea $F : I\!R^3 \rightarrow I\!R$ tal que

$$F(a, b, c) = \int_{-1}^{1} (at^2 + bt + c - t^3)^2\, dt$$

Hallar el mínimo de F en $I\!R^3$ <u>(Resolverlo como un problema de proyección)</u>.

EJERCICIO 86. *Se considera un sistema de ecuaciones* $A\vec{X} = \vec{b}$.
La existencia de una solución $\vec{X}_0$ *del sistema, equivale a decir que el vector* $\vec{b}$ *puede expresarse como combinación lineal de las columnas de la matriz* A*, siendo las componentes de* $\vec{X}_0$ *los coeficientes de dicha combinación lineal.*
Cuando el sistema es incompatible, se llama <u>*solución aproximada*</u> *a aquel vector* $\vec{w}$ *perteneciente al subespacio generado por las columnas de* A *que está más cerca del vector* $\vec{b}$ *o sea que minimiza* $||\vec{w} - \vec{b}||$.

Teniendo esto en mente, resuelva el siguiente problema :

En una carrera de autos hay tres tipos de autos, las cuales consumen 4 tipos de combustibles A,B,C y D. La siguiente tabla muestra cuánto de cada combustible precisa cada tipo de auto para una carrera:

Tipo de auto	Cantidad de combustible del tipo A (en litros)	Cantidad de combustible del tipo B (en litros)	Cantidad de combustible del tipo C (en litros)	Cantidad de combustible del tipo D (en litros)
Fiat	25	30	40	25
Ford	10	45	35	20
Chevrolet	15	30	20	45

Si en total se disponen de 150 litros del combustible A, 220 del B, 210 del C y 170 del D para realizar la carrera, ¿Cuántos autos de cada tipo pueden participar?.

Se asume que todo el combustible es consumido y que ningún auto choca durante la carrera.

Sugerencias:

1. Exprese el problema como un sistema de ecuaciones
2. Use calculadora o computadora

---

11. Aproximación por mínimos cuadrados

11.1. Introducción. En el curso de Geometría y Álgebra Lineal 1 se estudió la resolución de sistemas de ecuaciones lineales

$$A\vec{X} = \vec{b} \text{ donde } A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{m\times n}.$$

En aquel momento si el sistema de ecuaciones no tenía soluciones se decía que era incompatible. La pregunta que queda es si no podemos encontrar la mejor solución posible en algún sentido.
Este problema se presenta cuando tenemos una serie de medidas que corresponde a

dos variables que verifican una cierta ley (por ejemplo deberían estar todos alineados) y por errores de medición no se obtiene esa ley. Si se quiere determinar la ley de la mejor forma se deberá resolver un sistema incompatible o sea buscarle la mejor solución.

Antes de comenzar veamos la siguiente proposición, cuyo resultado será usado en la resolución por mínimos cuadrados.

Proposición 137. *Sea A una matriz $m \times n$ y S el subespacio generado por las columnas de A (subespacio de $\mathbb{R}^m$). Entonces, considerando el producto interno usual,*

$$S^{\perp} = \left\{ \vec{X} \in \mathbb{R}^m \ : \ A^t \vec{X} = \vec{0} \right\}.$$

<u>Demostración</u>:

Un elemento $\vec{X} \in S^{\perp}$ si y solo si $\vec{X}$ es ortogonal a todas las columnas de A; o sea, si y solamente si $\vec{X}$ es ortogonal a todas las filas de $A^t \iff A^t \vec{X} = \vec{0}$.
Recuerde que la matriz producto tiene por elementos los productos internos habituales entre las filas de la primera por las columnas de la segunda.

□

11.2. Descripción del método de aproximación. Haremos la descripción a través de un ejemplo. Queremos determinar la recta, $y = \alpha x + \beta$, que mejor aproxima a los puntos (x_i, y_i) $i = 1, 2, ..., m$ (mediciones del fenómeno).
Para cada punto tendremos un error $\epsilon_i = y_i - (\alpha x_i + \beta)$ (es la diferencia entre el valor medido y el que debió ser si está en la recta). El error lo estamos considerando con signo.
Podemos escribir los errores en forma matricial $\vec{\epsilon} = \vec{Y} - A\vec{X}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ x_m & 1 \end{pmatrix} \ , \ \vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_m \end{pmatrix} \ \text{y} \ \vec{X} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Aproximar por mínimos cuadrados es hallar la recta, o sea $\vec{X}$, o sea α y β, que minimice $\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + ... + \epsilon_m^2 = \|\vec{\epsilon}\|_2$.

11.3. Resolución del problema. Si observamos el problema y sustituimos debemos hallar $\vec{X}$ que minimice $\left\|\vec{Y} - A\vec{X}\right\|_2$.
Observando que $S = \left\{ A\vec{X} \in \mathbb{R}^m \ : \ \vec{X} \in \mathbb{R}^2 \right\}$ es un subespacio vectorial (es el subespacio generado por las columnas de A), el problema lo resolvimos en la sección anterior (teorema 134) y tenemos que la solución es $\vec{X}_{sol}$ tal que $A\vec{X}_{sol} = P_S(\vec{Y})$ y se tiene que

$$\vec{Y} - A\vec{X}_{sol} = \vec{Y} - P_S(\vec{Y}) = P_{S^\perp}(\vec{Y}).$$

Por la proposición 137, se tiene que $A^t P_{S^\perp}(\vec{Y}) = \vec{0}$ y por lo tanto $A^t(\vec{Y} - A\vec{X}_{sol}) = \vec{0}$. Despejando se tienen que la solución buscada, $\vec{X}_{sol}$, es solución del sistema $(A^tA)\vec{X}_{sol} = A^t\vec{Y}$, resolviendo este sistema habremos resuelto el problema. Estas ecuaciones se llaman <u>ecuaciones normales</u>

11.4. Aplicación : Aproximación de una función por polinomios. Sea la función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ cualquiera, en el espacio de las funciones. Buscaremos la mejor aproximación, en algún sentido, de la función f con polinomios de grado menor o igual que k. Para hacer esto elegimos n puntos en el intervalo $[a,b]$, $x_1, ..., x_n$ con $n \rangle k$ y para encontrar el polinomio minimizaremos, con el criterio de mínimos cuadrados, la diferencia entre la función y el polinomio en los puntos elegidos. O sea buscaremos el mejor polinomio que aproxime a los puntos $(x_i, f(x_i))$ con $i = 1, ..., n$ como lo vimos antes en el caso de la recta.

Observemos que en el planteo anterior si escribimos el polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_kx^k$ se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} x_1^k & . & . & . & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^k & . & . & . & x_2^2 & x_2 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ x_n^k & . & . & . & x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix}, \ \vec{Y} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ . \\ . \\ . \\ f(x_n) \end{pmatrix} \ \text{y} \ \vec{X} = \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k-1} \\ . \\ . \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}.$$

12. EJERCICIOS: Aproximación por mínimos cuadrados

EJERCICIO 87. *Sea $AX = b$ un sistema de ecuaciones donde*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Resolver $AX = b$.
2. Encontrar la "mejor solución" $\overline{X}$ aplicando el método de mínimos cuadrados.
3. Sea $p = A\overline{X}$. Verificar que el vector "error" $b-p$ es ortogonal a las columnas de A .

EJERCICIO 88. *En un experimento se midió según el tiempo una cierta magnitud y, obteniéndose los siguientes valores*

t	y
0	0
1	1
3	2
4	5

1. Graficar y contra t .
2. Aplicando el método de mínimos cuadrados hallar la "mejor " **recta** que ajuste los datos anteriores ($y = \alpha t + \beta$). Graficar la solución.
3. Aplicando el método de mínimos cuadrados hallar la "mejor " **parábola** que ajuste los datos anteriores ($y = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$). Graficar la solución.

EJERCICIO 89. *En un experimento con 2 materiales radiactivos se mide la lectura* **y** *de un contador Geiger en varios tiempos* **t** *. Se puede suponer basándose en la experiencia anterior que los datos verifican el siguiente modelo*

$$y = \alpha e^{-\lambda t} + \beta e^{-\mu t}$$

donde se conocen las vidas medias de ambos materiales: $\lambda = 1$ y $\mu = \frac{1}{2}$, pero se ignoran las cantidades de cada uno de ellos: α y β.
Se efectúan una serie de resultados obteniéndose los siguientes valores

t	y
0	8
1	4
3	1

Plantear las ecuaciones normales que optimizan α y β según el criterio de los mínimos cuadrados.

EJERCICIO 90. *Mostrar que el mejor ajuste de mínimos cuadrados a las medidas* $y_1, y_2, ..., y_m$ *por una recta horizontal (o sea por una función constante* $y = K$ *) es el promedio*

$$K = \frac{y_1 + y_2 + ... + y_m}{m}.$$

---

13. Ejercicios de Evaluación

Ejercicio 1

1. Sean V es un espacio vectorial con producto interno y S un subespacio vectorial de V. Si tomamos $\{s_1, s_2, ..., s_r\}$ una base ortonormal de S y $\{s_1, s_2, ..., s_r, v_{r+1}, ..., v_n\}$ una base ortonormal de V, probar que $\{v_{r+1}, ..., v_n\}$ es una base ortonormal de $S^{\perp}$.
2. Se considera $\mathbb{R}^3$ con el producto interno $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + \alpha x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$ si $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$ y $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3)$.
   Sean los vectores $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, -1)$ y $v_3 = (0, 0, 1)$.
   a) Hallar α para que v_1 y v_2 sean ortogonales.
   En las partes siguientes se trabajará con el producto interno dado por el α hallado.
   b) Utilizar el método de Gram-Schmidt para hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ a partir de $\{v_1, v_2, v_3\}$.
   c) Hallar una base de $S^{\perp}$, si $S = [(1, 1, 1)]$.

Ejercicio 2

1. Sean V es un espacio vectorial con producto interno y S un subespacio vectorial de V, no trivial. Probar las siguientes propiedades:
   a) $\| v \|^2 = \| P_S(v) \|^2 + \| P_{S^\perp}(v) \|^2 \ \forall v \in V$
   b) $\langle P_S(v), w \rangle = \langle v, P_S(w) \rangle \forall v, w \in V$
2. Para $V = \mathcal{P}_1$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que uno, con el producto interno $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\, dt$ y los vectores $v(t) = 1$ y $w(t) = t$ verificar las propiedades de la primer parte para $S = \{p \in V \ : p(-1) = 0\}$.
3. Repetir la parte anterior si $V = \mathcal{P}_2$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que dos.

Ejercicio 3

Se considera la siguiente tabla de valores, que corresponde a mediciones con error de una ley $y = f(t) = \alpha + \beta t^2$

La función $f(t)$ que mejor se ajusta (en el sentido de mínimos cuadrados) a los datos anteriores es:

t	y
-1	-1
0	2
1	-1
2	8

(1) $f(t) = -1 + 2t^2$. (2) $f(t) = 2 - 3t^2$. (3) $f(t) = 2 + \frac{3}{2}t^2$. (4) $f(t) = -4 + 3t^2$.
(5) $f(t) = 3 - \frac{2}{3}t^2$.

Ejercicio 4

Dar una razón por la cual la siguiente función no es un producto interno:
$\langle\,\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\langle(a,b),(c,d)\rangle = ac - bd$

Ejercicio 5

Indicar si es verdadero o falso que:
En cualquier espacio vectorial con producto interno,

$$\langle v, w\rangle = \langle P_S(v), P_S(w)\rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_{S^\perp}(w)\rangle \;\forall\, v, w \in V$$

siendo S un subespacio vectorial de V

Ejercicio 6

Indicar si es verdadero o falso que:

$$\{(i,-1,0),(1,i,0),(0,0,i)\}$$

es una base ortogonal de $\mathbb{C}^3$ con el producto interno usual.

Ejercicio 7

Sea $\langle,\rangle : \mathcal{M}(\mathbb{R})_{nxn} \mathrm{x} \mathcal{M}(\mathbb{R})_{nxn} \to I\!R$ tal que:

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} \quad \forall \quad A = (a_{ij})\,,\, B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{nxn}$$

1. Probar que $\langle,\rangle$ es un producto interno en $\mathcal{M}(\mathbb{R})_{nxn}$
2. Sea $S = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{nxn} \;:\; a_{ij} = \lambda_j,\;\; j = 1, 2, \cdots, n\}$
   - *a*) Probar que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}(\mathbb{R})_{nxn}$
   - *b*) Hallar una base ortonormal de S.
   - *c*) Hallar $S^\perp$ y $dim(S^\perp)$.
   - *d*) Probar que si $B \in S^\perp \quad \Rightarrow \quad B$ no es invertible.

Ejercicio 8

Se considera la siguiente **afirmación**:

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno $\langle \, , \, \rangle$ y $A = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ un conjunto ortonormal en V. Entonces A es linealmente independiente

y las siguientes demostraciones:

Demostración 1

Sean $a_1, ..., a_k$ escalares tales que

$$\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = \vec{0}.$$

Por lo tanto

$$\langle \sum_{i=1}^{k} a_i v_i, v_j \rangle = \langle \vec{0}, v_j \rangle = 0.$$

Por otro lado:

$$\langle \sum_{i=1}^{k} a_i v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} a_i \langle v_i, v_j \rangle = a_j$$

donde en la última igualdad se utilizó que $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $i \neq j$ y $\langle v_i, v_j \rangle = 1$ si $i = j$ válido pues $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ es ortonormal.

Con las dos consideraciones hechas se concluye que $a_j = 0 \ \forall \, j = 1, ..., r$, o sea A es L.I.

Demostración 2

Sean $a_1, ..., a_k$ escalares tales que

$$\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = \vec{0}.$$

Luego como $v_i \neq \vec{0} \ \forall \, i = 1, ..., r$ (pues $||v_i|| = 1 \neq 0$) para que se cumpla anterior debe cumplirse que $a_i = 0 \ \forall \, i = 1, ..., r$, o sea A es L.I.

Indicar la opción correcta:

(1) La afirmación es verdadera y solo la demostración 1 es correcta.

(2) La afirmación es verdadera y solo la demostración 2 es correcta.

(3) La afirmación es verdadera y ambas demostraciones son correctas.

(4) La afirmación es verdadera y ninguna demostración es correcta.

(5) La afirmación es falsa.

Ejercicio 9

1. Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita con el mismo conjunto de escalares $\mathbb{K}$, $\langle\, ,\, \rangle_1 : W \times W \to \mathbb{K}$ un producto interno en W y $T : V \to W$ una transformación lineal. Indicar qué condición debe cumplir T para que
   $\langle\, ,\, \rangle_2 : V \times V \to \mathbb{K}$ tal que $\langle u, v\rangle_2 = \langle T(u), T(v)\rangle_1$ sea un producto interno.
2. Sea $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(p) = (p(-1), p(0), p(1))$ y $\langle\, ,\, \rangle_1$ denota el producto interno usual en $\mathbb{R}^3$
   a) Probar que T es lineal.
   b) Probar que $\langle\, ,\, \rangle_2 : \mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$ tal que $\langle u, v\rangle_2 = \langle T(u), T(v)\rangle_1$ es un producto interno.

      De aquí en adelante se trabajará con este producto interno.

   c) Hallar p_1 y p_2 tal que $T(p_1) = (1, 0, 0)$ y $T(p_2) = (0, 1, 0)$
   d) Hallar una base ortonormal de $S^\perp$ para $S = S.G.(\{p_1, p_2\})$.
   e) Hallar $P_S(p_0)$ y $P_{S^\perp}(p_0)$ para $p_0(t) = t + 1$.
   f) Hallar una matriz asociada a $T_1 : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$, transformación lineal tal que
      $T_1(p) = p - 2P_{S^\perp}(p)$. Indique las bases utilizadas.

Ejercicio 10

Probar que si $\langle\,\rangle_1$ y $\langle\,\rangle_2$ son productos internos en un mismo espacio vectorial V, entonces $\langle\,\rangle$ definido por $\langle v, w\rangle = \langle v, w\rangle_1 + \langle v, w\rangle_2$ es un producto interno en V.

Ejercicio 11

Sea $\langle , \rangle : \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_n \to I\!R$ tal que :

$$\langle p, q\rangle = \sum_{i=1}^{i=k} p(i)q(i) \quad \text{con } k \in I\!N$$

1. Hallar para que valores de k es un producto interno en $\mathcal{P}_n$.
2. Para $n = 2$ y el menor valor de k hallado en (a),
   a) Hallar una base ortonormal de $\mathcal{P}_2$
   b) Sea $S = [p_1]$ donde $p_1 : p_1(t) = t \quad \forall t \in I\!R$, hallar $S^\perp$.

Ejercicio 12

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, con producto interno, y sea S un subespacio de V.

Sean las afirmaciones:

1. Si $\{u_1, u_2\}$ es una base ortogonal de S, entonces la proyección es
$$P_S(v) = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \ \forall\, v \in V.$$
2. $P_S(v) + P_{S^\perp}(v) = v \ \forall\, v \in V$.
3. $\langle v, w \rangle = \langle P_S(v), P_S(w) \rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_{S^\perp}(w) \rangle \ \forall\, v, w \in V$.

Indicar cuál de las siguientes opciones es correcta:

(1) Todas las afirmaciones son verdaderas.

(2) Ninguna de las afirmaciones es verdadera.

(3) Sólo la afirmación (II) es verdadera.

(4) Sólo las afirmaciones (II) y (III) son verdaderas.

(5) Sólo las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.

CAPíTULO 5

Transformaciones en Espacios con producto interno

El siguiente resultado, consecuencia de la definición de producto interno, es fundamental en los resultados que le siguen.

Lema 138. *Sea V un espacio con producto interno. Si $\langle v, w_1\rangle = \langle v, w_2\rangle$ para todo $v \in V$ entonces $w_1 = w_2$.*

Demostración:
Queda como ejercicio para el lector.

Teorema 139 (Teorema de Riesz)**.** *Dada $T : V \to \mathbb{K}$ lineal y V tal que si M es un subespacio de V, se cumple que $V = M \oplus M^{\perp}$, entonces existe un único $w \in V$ tal que*

$$T(v) = \langle v, w\rangle.$$

Demostración:
Del resultado anterior se deduce que si existe un tal w con esas propiedades el mismo es único. Si $T = 0$ entonces basta elegir $w = 0$. En otro caso, consideremos

$$M = \ker T = \{x \in V : \ T(x) = 0\},$$

entonces $V = M \oplus M^{\perp}$ y por lo tanto $M^{\perp}$ es no vacio. Elegimos un vector no nulo $z \in M^{\perp}$, multiplicando por un escalar adecuado podemos tener $T(z) = 1$.
Para cualquier $x \in V$ tenemos que

$$x = (x - T(x)z) + T(x)z.$$

El primer término a la derecha está en M y el segundo en $M^{\perp}$. Tomando el producto a ambos lados obtenemos:

$$\langle x, z\rangle = \langle T(x)z, z\rangle = T(x)||z||^2.$$

Por lo tanto basta elegir

$$w = \frac{1}{||z||^2} z$$

y cumple lo requerido. $\square$

1. Adjunta de una transformación

Teorema 140. *Sean V y W espacios con producto interno y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces existe una única transformación lineal $T^* : W \to V$ tal que*

$$\langle T(v), w\rangle_W = \langle v, T^*(w)\rangle_V .$$

Definición 141. *La transformación T^* es llamada la adjunta de T.*

Demostración:
Dado $w \in W$ definimos el funcional lineal $T_w : V \to \mathbb{K}$ donde

$$T_w(v) = \langle T(v), w\rangle.$$

De aplicar el teorema de Riesz resulta lo buscado. □

PROPIEDADES DEL ADJUNTO.

1. $(T + S)^* = T^* + S^*$.
2. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.
3. $(TS)^* = S^* T^*$.
4. T es invertible si y sólo si T^* lo es y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
5. $(T^*)^* = T$.

Lema 142. *Sean V y W espacios con producto interno , B y C bases ortonormales de V y W respectivamente. Entonces*

$${}_B(T^*)_C = \overline{[{}_C(T)_B]}^T .$$

---

2. Transformaciones lineales autoadjuntas

Definición 143 (Transformación lineal autoadjunta)**.** *Sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Diremos que T es autoadjunta sí y solo sí*

$$\langle T(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle \quad \forall v, w \in V.$$

Es lo mismo que decir que T coincide con T^* su adjunta.

Recordemos que una matriz A es simétrica cuando $A = A^t$.

Teorema 144. *Sea V un espacio vectorial <u>real</u> con producto interno, B una base <u>ortonormal</u> de V y $T : V \to V$ lineal.*

$$\boxed{T \text{ es autoadjunta} \Leftrightarrow {}_B(T)_B \text{ es simétrica.}}$$

Demostración:
La columna j-ésima de ${}_B(T)_B$ es el vector de coordenadas de $T(v_j)$ en B.

Como B es una base ortonormal $T(v_j) = \langle T(v_j), v_1\rangle v_1 + \ldots + \langle T(v_j), v_n\rangle v_n$ y por lo tanto si ${}_B(T)_B = (a_{ij})$ se tiene $a_{ij} = \langle T(v_j), ; v_i\rangle$.
Utilizando que el espacio vectorial es real y que T es autoadjunta:

$$a_{ji} = \langle T(v_i),\, v_j\rangle = \langle v_j,\, T(v_i)\rangle = \langle T(v_j),\, v_i\rangle = a_{ij}$$

y ${}_B(T)_B$ es simétrica.

$\square$

Definición 145. *Se dice que una matriz A es hermítica$\Leftrightarrow A = \left(\bar{A}\right)^t$ (la matriz conjugada se obtiene conjugando cada una de sus entradas).*

Teorema 146. *Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno, B una base ortonormal de V y $T : V \to V$ lineal.*

$$\boxed{T \text{ es autoadjunta} \Leftrightarrow {}_B(T)_B \text{ es hermítica.}}$$

Demostración:

Se deja como ejercicio (modifique la demostración del teorema anterior)

Teorema 147.

Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno y $T : V \to V$ lineal.

$$\boxed{T \text{ es autoadjunta} \Leftrightarrow \langle T(v), v\rangle \in \mathbb{R}\ \forall v \in V.}$$

Demostración:
$(\Rightarrow)$ En efecto $\forall v \in V$ se cumple que

$$\langle T(v), v\rangle \underset{\substack{T \text{ es} \\ \text{autoadjunta}}}{=} \langle v, T(v)\rangle = \overline{\langle T(v), v\rangle}.$$

Así $\langle T(v), v\rangle = \overline{\langle T(v), v\rangle}$ lo que implica que $\langle T(v), v\rangle \in \mathbb{R}$.
$(\Leftarrow)$ Por hipótesis $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ y $\forall v, w \in V$ se cumple que

$$\langle T(v + \lambda w), v + \lambda w\rangle \in \mathbb{R}.$$

Desarrollando obtenemos

$$\underbrace{\langle T(v+\lambda w), v+\lambda w\rangle}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{\langle T(v), v\rangle}_{\in\mathbb{R}} + \lambda\langle T(w), v\rangle + \bar{\lambda}\langle T(v), w\rangle + \underbrace{|\lambda|^2\langle T(w), w\rangle}_{\in\mathbb{R}}.$$

De donde concluimos que $\forall\lambda\in\mathbb{C}$, $\forall v, w\in V$,

$$\lambda\langle T(w), v\rangle + \bar{\lambda}\langle T(v), w\rangle \ \in\mathbb{R}.$$

En particular si $\lambda = 1$ tenemos

$$\langle T(w), v\rangle + \langle T(v), w\rangle \in\mathbb{R} \Leftrightarrow Im\left(\langle T(w), v\rangle + \langle T(v), w\rangle\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow Im\left(\langle T(w), v\rangle\right) = -Im\left(\langle T(v), w\rangle\right) \underset{-Im(z)=Im(\bar{z})}{\Leftrightarrow} Im\left(\langle T(w), v\rangle\right) = Im\left(\overline{\langle T(v), w\rangle}\right).$$

Concluimos que

$$Im\left(\langle T(w), v\rangle\right) = Im\left(\langle w, T(v)\rangle\right). \tag{10}$$

Si elegimos $\lambda = i$,

$$i\langle T(w), v\rangle - i\langle T(v), w\rangle \in\mathbb{R} \Leftrightarrow i\left(\langle T(w), v\rangle - \langle T(v), w\rangle\right) \in\mathbb{R}$$

$$Im\left(i\left(\langle T(w), v\rangle - \langle T(v), w\rangle\right)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underset{Im(iz)=-Re(z)}{\Leftrightarrow} Re\left(\langle T(w), v\rangle - \langle T(v), w\rangle\right) = 0 \Leftrightarrow Re\left(\langle T(w), v\rangle\right) = Re\left(\langle T(v), w\rangle\right)$$

$$\underset{Re(z)=Re(\bar{z})}{\Leftrightarrow} Re\left(\langle T(w), v\rangle\right) = Re\left(\overline{\langle T(v), w\rangle}\right).$$

Llegamos a:

$$Re\left(\langle T(w), v\rangle\right) = Re\left(\langle w, T(v)\rangle\right). \tag{11}$$

De (10) y (11) concluimos lo deseado: $\langle T(w), v\rangle = \langle w, T(v)\rangle \ \ \forall v, w\in V$. Por lo tanto T es autoadjunta.

$\square$

Observación 148. *El teorema 147 no vale si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.*

Teorema 149. *Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno. Si $T : V\to V$ es autoadjunta entonces todas las raíces del polinomio característico de T son reales.*

Demostración:

Como el cuerpo es $\mathbb{C}$,existe λ_0 raíz del polinomio característico de T. Sea $v_0 \neq \vec{0}$ un vector propio asociado a λ_0,entonces

$$\langle T(v_0), v_0\rangle = \langle \lambda_0 v_0, v_0\rangle = \lambda_0\langle v_0, v_0\rangle = \lambda_0\|v_0\|^2 \underset{\|v_0\|\neq\vec{0}}{\Rightarrow} \lambda_0 = \frac{\langle T(v_0), v_0\rangle}{\|v_0\|^2}.$$

Como T es autoadjunta (sobre $\mathbb{C}$) y por lo tanto$\langle T(v_0), v_0\rangle \in \mathbb{R}$ y como $\|v_0\|^2 \in \mathbb{R}$ resulta que $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

□

Teorema 150. *Sea $A \in \mathcal{M}(\mathbb{C})_{n\times n}$. Si A es hermítica entonces todas las raíces del polinomio característico de A son reales.*

Demostración:

Basta considerar una transformación lineal que en una base ortonormal tenga a A como matriz asociada (podría ser T_A con el producto interno usual de $\mathbb{C}^n$) y aplicar el teorema 149. □

Teorema 151. *Sea $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times n}$. Si A es simétrica entonces todas las raíces del polinomio característico de A son reales.*

Demostración:

Consideremos $\mathbb{C}^n$ con el producto interno habitual sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ y la transformación lineal $TC_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tal que $TC_A(\vec{X}) = A\vec{X}$. Probemos que TC_A es autoadjunta.

Siendo la base canónica E de $\mathbb{C}^n$ ortonormal respecto al producto interno habitual, bastará con probar que ${}_E(TC_A)_E$ es hermítica.

Pero ${}_E(TC_A)_E = A$ y siendo por hipótesis A simétrica y real cumple

$$\bar{A}^t = A^t = A$$

es decir que $\overline{{}_E(TC_A)_E}^t = {}_E(TC_A)_E$ o sea ${}_E(TC_A)_E$ es hermítica como queríamos,

Como $TC_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ es autoadjunta (sobre $\mathbb{C}$) por el teorema 149 todas las raíces del polinomio característico de TC_A son reales. Pero como los polinomios característicos de TC_A y A coinciden se obtiene lo buscado.

□

Teorema 152. *Sea V un espacio vectorial real con producto interno. Si $T : V \to V$ autoadjunta entonces todas las raíces del polinomio característico de T son reales.*

Demostración:
Sea B una base ortonormal de V. Luego como T es autoadjunta ${}_B(T)_B$ es simétrica y por el teorema 151 todas las raíces del polinomio característico de ${}_B(T)_B$ (es decir de T) son reales.

$\square$

Teorema 153 (Teorema Espectral para transformaciones autoadjuntas)**.** *Sea V un espacio vectorial, real o complejo, de dimensión finita.*
Si $T : V \to V$ es una transformación lineal autoadjunta, entonces existe una base ortonormal de V formada por vectores propios de T.

Demostración:
Haremos la demostración por inducción completa sobre $n = dim(V)$.
Paso base: $n = 1$.
Debemos probar que si $dim(V) = 1$ podemos encontrar una base ortonormal de V formada por vectores propios de T.
Consideremos $B = \{u\}$ base de V con $||u|| = 1$. Como $dim(V) = 1$, $T(u) = \lambda u$ y por lo tanto u es vector propio de T asociado al valor propio λ y se tiene la tesis pues B es la base buscada.

Paso inductivo:
Suponemos el resultado cierto para todo espacio vectorial de dimensión menor o igual a $n-1$ y debemos probar que se cumple para cuando la dimensión es n.
Siendo T autoadjunta, vimos que las raíces de su polinomio característico son reales. Entonces siempre existe $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ valor propio de T (tanto sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Sea $v_0 \neq \vec{0}$ vector propio de T asociado a λ_0 (esto es $T(v_0) = \lambda_0 v_0$)y consideremos

$$w_0 = \frac{v_0}{\|v_0\|}.$$

Luego $\|w_0\| = 1$ y $w_0 \neq \vec{0}$ es un vector propio de T asociado al valor propio λ_0 pues

$$T(w_0) = T\left(\frac{v_0}{\|v_0\|}\right) = \frac{1}{\|v_0\|}T(v_0) = \frac{1}{\|v_0\|}\lambda_0 v_0 = \lambda_0 \frac{v_0}{\|v_0\|}.$$

Sea $S = S.G.(\{w_0\})$. Sabemos que $V = S \oplus S^{\perp}$ y por tanto $dim\left(S^{\perp}\right) = dim(V) - dim(S) = n-1$.

Ahora probaremos que los transformados de los vectores de $S^{\perp}$ son vectores de $S^{\perp}$. Sea $u \in S^{\perp}$ ($\langle u, w_0 \rangle = 0$), entonces

$$\begin{aligned} \langle T(u), w_0 \rangle &= \langle u, T(w_0) \rangle \\ &= \langle u, \lambda_0 w_0 \rangle \\ &= \lambda_0 \langle u, w_0 \rangle = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto $T(u) \in S^{\perp}$. Observar que en la igualdad anterior se utilizó que T es autoadjunta y que $dim(S) = 1$.

Luego $T|_{S^{\perp}} : S^{\perp} \to S^{\perp}$ es autoadjunta (pues al ser autoadjunta en todo V su restricción a un subespacio invariante también verificará la definición para ser autoadjunta).

Entonces, por la hipótesis inductiva, como $dim\left(S^{\perp}\right) = n - 1$ y $T|_{S}^{\perp}$ es autoadjunta, existe una base ortonormal $\{w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}\}$ de $S^{\perp}$ formada por vectores propios de $T|_{S^{\perp}}$ (es decir, vectores propios de T en $S^{\perp}$).

Por último, siendo $V = S \oplus S^{\perp}$, $\{w_0\}$ base ortonormal de S y $\{w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}\}$ base ortonormal de $S^{\perp}$ (ambas constituidas por vectores propios de T) resulta que $\{w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}\}$ es una base ortonormal de V formada por vectores propios de T.

$\square$

Observación 154. *Sea V un espacio vectorial, real o complejo, de dimensión finita. Si $T : V \to V$ es una transformación lineal autoadjunta y λ_1, λ_2 son valores propios* **distintos** *de T, entonces los subespacios propios asociados a dichos valores propios son perpendiculares (es un buen ejercicio probar esta afirmación).*

Teorema 155. *Si existe una base ortonormal B del espacio V formada por vectores propios y las raíces de X_T son reales $\Rightarrow T$ es autoadjunta.*

Demostración:

Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal de V formada por vectores propios de T, es decir que $T(v_i) = \lambda_i \, v_i$ con $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (pues las raíces de X_T son reales).

Luego $_B(T)_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, es simétrica y hermítica y por lo tanto T es autoadjunta.

$\square$

Teorema 156 (Teorema Espectral para matrices simétricas)**.** *Si $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times n}$ es una matriz simétrica, entonces $\exists\, P \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times n}$ invertible con $P^{-1} = P^t$ tal que $A = P\,D\,P^t$ siendo $D \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times n}$ una matriz diagonal.*

Demostración:

Consideramos $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $T_A(\vec{X}) = A\vec{X}$.

Considerando el producto interno habitual en $\mathbb{R}^n$ se tiene que T_A es autoadjunta (¿por qué?) y por lo tanto podemos aplicar el teorema espectral y se tiene una base ortonormal B en la cual T_A se diagonaliza.

Así $A = {}_{\mathcal{C}}(T_A)_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{C}}(Id)_{B\,B}(T_A)_{B\,B}(Id)_{\mathcal{C}}$.

Llamando $D = {}_B(T_A)_B$ (diagonal) y $P = {}_{\mathcal{C}}(Id)_B$ se tiene $A = P\,D\,P^{-1}$.

Solo resta probar que la matriz P cumple la condición $P^{-1} = P^t$ (esto dice que la matriz P es ortogonal) lo cual se deriva del hecho de que B sea una base ortonormal (la prueba se encuentra luego donde se trabaja con las matrices ortogonales). $\square$

---

3. EJERCICIOS : Transformaciones Lineales Adjuntas

Ejercicio 91. *Dada la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que cumple:*

$$T(1,0,0) = 2,\ T(0,1,0) = 1,\ T(0,0,1) = -1,$$

utilizando el teorema de Riesz encontrar v_T tal que

$$\langle v_T, x\rangle = T(x).$$

EJERCICIO 92. *Hallar la representación de Riesz de los siguientes funcionales lineales*

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definido por $f(x, y, z) = x + 2y - 3z$
(considerando en $\mathbb{R}^3$ el producto interno habitual)
2. $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ definido por $f(x, y, z) = ix + (2 + 3i)y + (1 - 2i)z$
(considerando en $\mathbb{C}^3$ el producto interno habitual)
3. $f : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$ definido por $f(p) = p(1)$,
(considerando en $\mathcal{P}_2$ el producto interno: $< p, q >= \int_0^1 p(t)q(t)\, dt$)

EJERCICIO 93. *Encuentre la transformación adjunta de las siguientes transformaciónes con respecto alos productos internos habituales.*

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + 2z, x + 2y + 3z)$.
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (-y + z, -x + 2z, x + 2y)$.
3. $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ dada por $T(p)(x) = xp'(x) - (xp(x))'$.
4. $T : \mathcal{M}(\mathbb{R})_{3\times 3} \to \mathcal{M}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ donde $T(A) = A^T + A$.

EJERCICIO 94.

1. Se considera $\mathbb{C}^3$ con el producto interno habitual
Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tal que $T(x, y, z) = (\ 2x + iy,\ y - 5iz,\ x + (1 - i)y + 3z\ )$
Hallar ${}_B((T^*))_B$ para alguna base B conveniente
2. Se considera $\mathcal{P}_2$ con el producto interno $< p, q >= \int_0^1 p(t)q(t)\, dt$.
Sea $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ tal que $T(p) = q$ donde $q : q(t) = (2t + 1)p(t)' + 3p(t) - p(t + 2) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
Hallar ${}_B((T^*))_B$ para alguna base B conveniente
3. Se considera $\mathcal{M}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ con el producto interno $< A, B >= tr(B^t A)$
Sea $T : \mathcal{M}(\mathbb{R})_{2\times 2} \to \mathcal{M}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ tal que $T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} A$
Hallar ${}_B((T^*))_B$ para alguna base B conveniente

EJERCICIO 95.

<u>Propiedades de la adjunta</u>

Probar que:

1. $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$
2. $(T + S)^* = T^* + S^*$

3. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$
4. $(T^*)^* = T$
5. T es invertible $\Leftrightarrow$ T^* es invertible. Además $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
6. λ es valor propio de $T \Leftrightarrow \overline{\lambda}$ es valor propio de T^*

Ejercicio 96.

1. Se considera en $I\!R^3$ el producto interno habitual

   Sea $T: I\!R^3 \to R^3$ lineal dada por: ${}_B(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

   siendo $B = \{(1,1,0), (0,1,0), (1,0,1)\}$

   Probar que T es autoadjunta.
2. Se considera en $I\!R^3$ el producto interno habitual

   Sea $T: I\!R^3 \to R^3$ lineal dada por:

$$T(1,1,0) = (5,8,-1), \;\; T(1,-1,1) = (10,-14,10), \;\; T(2,1,1) = (13,a,b)$$

   Hallar a y b para que T sea autoadjunta.

Ejercicio 97. *Dado $T: V \to V$ un operador donde V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con producto interno, mostrar que $T + T^*$ es autoadjunto.*

Ejercicio 98. *En las condiciones del problema anterior, muestre que:*

$$\ker(T^*) = [Im\ (T)]^\perp \text{ y } Im\ (T^*) = [\ker(T)]^\perp.$$

Ejercicio 99.

1. a) Probar que $\mathcal{B}_1 = \{p_0, p_1, p_2\}$, donde $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = 2t - 1$, $p_2(t) = 6t^2 - 6t + 1$ es una base ortogonal de $\mathcal{P}_2$ respecto al producto interno $< p, q >= \int_0^1 p(t)q(t)\ dt$
   b) Probar que $\mathcal{B}_2 = \{q_0, q_1, q_2\}$, donde $q_0(t) = 1$, $q_1(t) = t - 1$, $q_2(t) = t^2 - 4t + 2$ es una base ortogonal de $\mathcal{P}_2$ respecto al producto interno $< p, q >= \int_0^\infty e^{-t} p(t)q(t)\ dt$
   c) Probar que la base canónica de $\mathcal{P}_2$ es ortogonal respecto al producto interno

      $< p, q >= p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + \frac{1}{4} p''(0)q''(0)$
2. Se considera la transformación lineal $T: \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ tal que ${}_{\mathcal{C}}((T))_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

siendo $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathcal{P}_2$.

Investigar si T es autoadjunta respecto a cada uno de los productos internos de las partes anteriores.

Ejercicio 100. *En los siguientes casos probar que T es autoadjunta, hallar su forma diagonal y una base ortonormal del espacio formada por vectores propios de T.*

1. $T(x,y,z) = \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}z, 2y, \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}z\right)$
2. $T(x,y,z) = \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z, -y, -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}z\right)$

Ejercicio 101.

Sea $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Se sabe que λ y μ son valores propios distintos de A, con $mg(\lambda) = mg(\mu) = 2$. Además se sabe que los vectores $(1,1,0,0)$ y $(1,1,1,1)$ pertenecen a S_λ (el subepacio propio asociado a λ).

Una base de S_μ (el subepacio propio asociado a μ) es:

A) $B = \{(1,-1,0,0),\ (0,1,-1,0)\}$.
B) $B = \{(0,1,-1,0),\ (0,0,1,-1)\}$.
C) $B = \{(0,0,1,-1),\ (-1,0,0,1)\}$.
D) $B = \{(-1,0,0,1),\ (1,-1,0,0)\}$.
E) $B = \{(1,-1,0,0),\ (0,0,1,-1)\}$.

---

4. Transformaciones ortogonales y unitarias

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $T : V \to V$ una transformación lineal.

Definición 157 (Transformaciones lineales ortogonales y unitarias)**.** *Una transformación T es unitaria cuando T preserva el producto interno; esto es:*

$$\langle T(v_1), T(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle \quad \forall\, v_1, v_2 \in V.$$

En el caso particular que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ diremos que T es ortogonal.

Proposición 158. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $T : V \to V$ una transformación lineal.*
Son equivalentes:

(a) *T es unitaria (T conserva el producto interno).*
(b) *T conserva la norma ($\|T(v)\| = \|v\| \ \ \forall\, v \in V$).*
(c) *T lleva bases ortonormales en bases ortonormales ($\forall\, B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ base ortonormal de V se tiene que $T(B) = \{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ también es base ortonormal de V).*
(d) *T lleva una base ortonormal en otra base ortonormal ($\exists\, B_0 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ base ortonormal de V se tiene que $T(B_0) = \{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ también es base ortonormal de V).*

Demostración:

(a) $\Rightarrow$ (b) Tenemos que:

$$\begin{array}{lcl} \|v\|^2 & = & \langle v, v\rangle \\ & \overset{T \text{ preserva producto}}{\overset{\downarrow}{=}} & \langle T(v), T(v)\rangle \\ & = & \|T(v)\|^2 \\ & & \Rightarrow \|v\| = \|T(v)\| \ \forall\, v \in V. \end{array}$$

(b) $\Rightarrow$ (a). Como T preserva la norma se cumple que

$$\langle v, v\rangle = \|v\|^2 = \|T(v)\|^2 = \langle T(v), T(v)\rangle.$$

Así $\langle v, v\rangle = \langle T(v), T(v)\rangle \ \ \forall\, v \in V.$ (i)
Veamos que también se cumple que $\langle v_1, v_2\rangle = \langle T(v_1), T(v_2)\rangle \ \ \forall\, v_1, v_2 \ \in V$, es decir que T conserva el producto interno.

En efecto $\langle v_1 + v_2, v_1 + v_2\rangle = \|v_1\|^2 + \langle v_1, v_2\rangle + \langle v_2, v_1\rangle + \|v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \langle v_1, v_2\rangle + \overline{\langle v_1, v_2\rangle} + \|v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + 2\, Re\,(\langle v_1, v_2\rangle) + \|v_2\|^2$ (ii)

Utilizando (i), la linealidad de T y las propiedades del producto interno se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle v_1 + v_2, v_1 + v_2\rangle &= \langle T(v_1 + v_2), T(v_1 + v_2)\rangle = \langle Tv_1 + Tv_2, Tv_1 + Tv_2\rangle \\ &= \|T(v_1)\|^2 + 2Re\langle T(v_1), T(v_2)\rangle + \|T(v_2)\|^2 (iii) \end{aligned}$$

Igualando (iii) con (ii) y usando nuevamente (i) se tiene que:

$$2\, Re\,(\langle v_1, v_2\rangle) = 2Re\langle T(v_1), T(v_2)\rangle\,. \tag{12}$$

Terminaremos la demostración separando el caso real y el complejo.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se es inmediato a partir de (12) que $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle T(v_1), T(v_2) \rangle$ y la prueba ha concluido.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ falta ver que las partes imaginarias también son iguales, para ello sustituimos en (12) v_1 por iv_1 (observar que la igualdad mencionada vale $\forall\, v_1, v_2 \in V$) obteniéndose

$$\begin{aligned} Im(\langle v_1, v_2 \rangle) &= Re(i\langle v_1, v_2 \rangle) = Re(\langle iv_1, v_2 \rangle) \overset{\overset{(12)}{\downarrow}}{=} Re(\langle T(iv_1), T(v_2) \rangle) \\ &= Re(i\langle T(v_1), T(v_2) \rangle) = Im(\langle T(v_1), T(v_2) \rangle). \end{aligned}$$

Hemos probado que:

$$Im(\langle v_1, v_2 \rangle) = Im(\langle T(v_1), T(v_2) \rangle) \tag{13}$$

De (12) y (13): $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle T(v_1), T(v_2) \rangle$

Habiendo probado que (a) y (b) son equivalentes será indistinto utilizar una, otra o ambas como hipótesis o tesis

(a) y (b) $\Rightarrow$ (c)

Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal de V cualquiera. Como T preserva el producto interno, el conjunto $T(B) = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ cumple que

$$\langle T(v_i), T(v_j) \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & si \ \ i = j \\ 0 & si \ \ i \neq j \end{cases}$$

Por lo tanto $T(B)$ es un conjunto ortonormal de vectores de W.

Luego como todo conjunto ortogonal que no contiene al vector nulo es L.I. $T(B)$ lo es (observar que $T(v_i) \neq \vec{0} \ \ \forall\, i = 1, 2, ..., n$, pues $\|T(v_i)\| = 1$) y como $T(B)$ tiene tantos vectores como $n = dim(V)$, se concluye que $T(B)$ es base de V (y ya habíamos probado que era ortonormal).

(c) $\Rightarrow$ (d) Inmediato.

(d) $\Rightarrow$ (a) y (b)

Probemos que T preserva la norma (b) (ya sabemos que (a) es equivalente a (b), igualmente (b) se prueba en forma similar y se recomienda hacerlo como ejercicio).

Sabemos que existe $B_0 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es base ortonormal de V tal que $T(B_0) = \{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ es una base ortonormal de V.

Sea $v \in V$, luego existen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$.

$$\begin{aligned}
\text{Luego } \|v\|^2 &= \|\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n\|^2 \overset{\substack{\text{Pitágoras}\\ \downarrow}}{=} \\
&\quad \|\alpha_1 v_1\|^2 + \|\alpha_2 v_2\|^2 + ... + \|\alpha_n v_n\|^2 \\
&= |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + ... + |\alpha_n|^2.
\end{aligned}$$

Se observa que es posible aplicar Pitágoras pues $\{\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, ..., \alpha_n v_n\}$ es un conjunto ortogonal (verifíquelo). De la misma manera, usando la linealidad de T:

$$\begin{aligned}
\|T(v)\|^2 &= \|T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n)\|^2 \\
&= \|\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ... + \alpha_n T(v_n)\|^2 \\
&\overset{\substack{\text{Pitágoras}\\ \downarrow}}{=} \|\alpha_1 T(v_1)\|^2 + ... + \|\alpha_n T(v_n)\|^2 \\
&= |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + ... + |\alpha_n|^2.
\end{aligned}$$

Se observa que es posible aplicar Pitágoras pues $\{\alpha_1 T(v_1), \alpha_2 T(v_2), \ldots, \alpha_n T(v_n)\}$ es un conjunto ortogonal, pues por hipótesis $T(B_0)$ es ortonormal. Así

$$\|v\|^2 = \|T(v)\|^2 \Rightarrow \|v\| = \|T(v)\| \ \forall\, v \in V.$$

$\square$

EJERCICIO 102.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interno

Transformaciones lineales antihermíticas

Una transformación lineal $T : V \to V$ es antihermítica $\Leftrightarrow \quad T = -T^*$.

Probar que:

1. Si T es antihermítica y λ es valor propio de $T \quad \Rightarrow \quad Re(\lambda) = 0$
2. T es antihermítica $\Leftrightarrow \quad T = iS$ con S autoadjunta

Descomposición cartesiana de una transformación lineal

Sea $T : V \to V$ una transformación lineal, probar que:

1. $(T + T^*)$ es autoadjunta.
2. $(T - T^*)$ es antihermítica.
3. existen $T_1 : V \to V$ y $T_2 : V \to V$ transformaciones lineales autoadjuntas tales que $T = T_1 + iT_2$.
   NOTA: T_1 *se llama la parte real de* T *y* T_2 *se llama la parte imaginaria de* T.

Sea $T : V \to V$ una transformación lineal antihermítica.

Probar que:

1. $T - I$ es invertible.
2. $U = (T + I)(T - I)^{-1}$ es unitaria y $U - I$ es invertible

Sea $U : V \to V$ una transformación lineal unitaria con $U - I$ invertible. Probar que $T = (U + I)(U - I)^{-1}$ es antihermítica.

---

5. Matrices ortogonales y unitarias

Definición 159 (Matrices ortogonales y unitarias)**.** *Sea* $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times n}$*,* A *es ortogonal cuando* A *es invertible y* $A^{-1} = A^t$*.*

Sea $A \in \mathcal{M}(\mathbb{C})_{n\times n}$*,* A *es unitaria si* A *es invertible y* $A^{-1} = \overline{A}^t$*.*

Dadas $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times n}$, llamamos $A_{(i)} \in \mathbb{R}^n$ a la i-ésima fila de A y por $B^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ a la j-ésima columna de A.

Lema 160. *Si* $(AB)_{ij}$ *es el elemento* ij *(es decir de la fila* i *y columna* j*) de la matriz* AB *se cumple que* $(AB)_{ij} = \left\langle A_{(i)}, B^{(j)} \right\rangle$ *donde* $\langle\, , \rangle$ *el producto interno habitual en* $\mathbb{R}^n$*.*

Demostración:
En efecto, si $A_{(i)} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ y $B^{(j)} = (b_{1j}, b_{2j}, ..., b_{nj}) \in \mathbb{R}^n$ resulta de la definición del producto interno habitual en $\mathbb{R}^n$ que

$$\left\langle A_{(i)}, B^{(j)} \right\rangle = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\, b_{kj}.$$

Por otro lado, por la definición de producto de matrices

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\, b_{kj}.$$

Igualando se obtiene la tesis.

$\square$

Observación 161. *En forma similar, para el caso complejo, se tiene que si $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{C})_{n\times n}$, entonces*

$$\left(A\overline{B}\right)_{ij} = \left\langle A_{(i)}, B^{(j)} \right\rangle$$

donde $\langle \, , \rangle$ el producto interno habitual en $\mathbb{C}^n$.

Proposición 162. *Sea $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times n}$. Entonces A es ortogonal si y sólo si sus columnas*

$$\left\{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}\right\}$$

forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ considerado con el producto interno habitual.

Demostración:
La matriz A es ortogonal $\Leftrightarrow$ A es invertible y $A^{-1} = A^t$. Entonces $A^tA = I$ de donde vemos que $(A^tA)_{ij} = (I)_{ij}$.
Entonces

$$(A^tA)_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

que se cumple sii lema 160

$$\left\langle A^t_{(i)}, A^{(j)} \right\rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

como $A^t_{(i)} = A^{(i)}$

$$\left\langle A^{(i)}, A^{(j)} \right\rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

Que se cumple si y solo si

$$\left\{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}\right\}$$

es un conjunto ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

$\square$

Observación 163. *En forma similar, para el caso complejo, se tiene que si $A \in \mathcal{M}(\mathbb{C})_{n\times n}$, A es unitaria $\Leftrightarrow$ sus columnas $\left\{A^{(1)}, A^{(2)}, ..., A^{(n)}\right\}$ son una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ (considerado con el producto interno habitual).*

La demostración queda como ejercicio.

Proposición 164. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y B una base ortonormal de V y $T : V \to V$ lineal. Entonces T es ortogonal $\Leftrightarrow$ ${}_B(T)_B$ es una matriz ortogonal.*

Demostración:

Como $B = \{v_1, ...v_n\}$ es una base ortonormal para cualquier $v \in V$ se tiene que:

$$v = \langle v, v_1\rangle v_1 + ... + \langle v, v_n\rangle v_n$$

En particular se tiene:

$$T(v_j) = \langle T(v_j), v_1\rangle v_1 + ... + \langle T(v_j), v_n\rangle v_n \ \ \forall\, j = 1, 2, ..., n$$

Por un lado se deduce que la j-ésima columna de ${}_B\left((T)\right)_B$ es

$$\begin{pmatrix} \langle T(v_j), v_1\rangle \\ \vdots \\ \langle T(v_j), v_n\rangle \end{pmatrix}$$

y por otro lado se tiene que:

$$\langle T(v_i), T(v_j)\rangle = \langle\langle T(v_i), v_1\rangle v_1 + ... + \langle T(v_i), v_n\rangle v_n, \langle T(v_j), v_1\rangle v_1 + \ldots + \langle T(v_j), v_n\rangle v_n\rangle$$

$$\underset{\substack{B \text{ es ortonormal y} \\ V \text{ espacio vectorial real}}}{=} \langle T(v_i), v_1\rangle\langle T(v_j), v_1\rangle + ... + \langle T(v_i), v_n\rangle\langle T(v_j), v_n\rangle v_n\rangle$$

Entonces, usando propiedades vistas antes:

T ortogonal $\Leftrightarrow T(B)$ es una base ortonormal de $V \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} < T(v_i), T(v_j) > &=< T(v_i), v_1 >< T(v_j), v_1 > +...+ < T(v_i), v_n >< T(v_j), v_n > \\ &= \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ las columnas de ${}_B(T)_B$ forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow {}_B(T)_B$ es una matriz ortogonal.

$\square$

Proposición 165. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, B una base* ortonormal *de V y $T : V \to V$ lineal.*
T es unitaria $\Leftrightarrow {}_B(T)_B$ es una matriz unitaria.

Demostración: Queda como ejercicio.

Proposición 166. *Sea V espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Si $T : V \to V$ es unitaria entonces sus valores propios tienen módulo 1.*

Demostración:
Por ser el cuerpo $\mathbb{C}$, existe λ valor propio de T y $v \neq \vec{0}$ tal que $T(v) = \lambda v$.

Como T es unitaria, conserva la normal, luego $\|T(v)\| = \|v\| \Rightarrow \|\lambda v\| = \|v\| \Rightarrow |\lambda| = 1$.

$\square$

Observación 167. *Si $A \in \mathcal{M}(\mathbb{C})_{n\times n}$ es unitaria entonces las raíces de su polinomio característico tienen módulo 1.*

Observación 168. *Si $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times n}$ es ortogonal entonces las raíces de su polinomio característico son complejos de módulo 1 (las únicas raíces que son valores propios son aquellas que sean iguales a 1 o a -1, pues para ser valores propios deben ser reales).*

Observación 169. *Si V es sobre $\mathbb{R}$ se concluye que todas las raíces del polinomio característico de $T : V \to V$ unitaria son complejos de módulo 1.(las únicas raíces que son valores propios son aquellas que sean iguales a 1 o a -1, pues para ser valores propios deben ser reales).*

6. Teorema espectral para transformaciones lineales unitarias

El teorema espectral es solo válido para el caso de espacio vectorial complejo.

Teorema 170. *Sea V un espacio vectorial complejo ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de dimensión finita $dim(V) = n < \infty$. Si T es unitaria entonces existe una base ortonormal de V formada por vectores propios de T.*

Demostración:
Sean λ_0 un valor propio de T (siempre existe pues $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) y $v_0 \neq \vec{0}$ vector propio de T asociado a λ_0. Consideremos $w_0 = v_0 / \|v_0\|$ que cumple $\|w_0\| = 1$ y w_0 es vector propio de T asociado a λ_0.
Continuamos la prueba por inducción completa en $n = dim(V)$.

Paso base: Si $n = 1$ se cumple tesis pues $B = \{w_0\}$ es la base ortonormal buscada.

Paso inductivo: Supondremos ahora que el Teorema es cierto para espacios de dimensión $n - 1$ o menor y probaremos que también vale para espacios de dimensión n ($dim\,(V) = n$).
Sea $S = [w_0]$. Luego $dim\left(S^{\perp}\right) = n - 1$ (¿por qué?).

Probemos que $S^{\perp}$ es invariante bajo T. Como w_0 es un vector propio de T asociado a λ_0 entonces w_0 es vector propio de T^{-1} asociado a valor propio λ_0^{-1}, pues

$$T\,(w_0) = \lambda_0 w_0 \Rightarrow T^{-1}\,(T\,(w_0)) = T^{-1}\,(\lambda_0 w_0) \Rightarrow w_0 = \lambda_0\, T^{-1}\,(w_0)\,.$$

Si $u \in S^{\perp}$ se tiene que $\langle u, w_0\rangle = 0$ de donde se deduce que:

$$\begin{array}{lcl} \langle u, T^{-1}(w_0)\rangle & = & \langle u, \lambda_0^{-1} w_0\rangle \\ & = & \overline{\lambda_0}^{-1}\langle u, w_0\rangle \\ & = & \overline{\lambda_0}^{-1}\ 0 = 0. \end{array}$$

Por otro lado:

$$\begin{array}{lcl} \langle u, T^{-1}(w_0)\rangle & \underset{\text{T unitaria}}{\overset{\downarrow}{=}} & \langle T(u), T(T^{-1}(w_0))\rangle = \langle T(u), w_0\rangle. \end{array}$$

Igualando se tiene $< T(u), w_0 >= 0$ y por lo tanto $T(u) \in S^{\perp}$ (se observa que $dim(S) = 1$ y $\{w_0\}$ es base de S), quedando probado que $S^{\perp}$ es invariante bajo T. Luego como T es unitaria y $S^{\perp}$ es invariante bajo T se tiene que $T|_{S^{\perp}} : S^{\perp} \to S^{\perp}$ es unitaria (pues al ser unitaria en todo V su restricción a un subespacio invariante también verificará la definición para ser unitaria).

Entonces como $dim\left(S^{\perp}\right) = n-1$ y $T|_{S^{\perp}}$ es unitaria por la hipótesis inductiva existe una base ortonormal $\{w_1, w_2, ..., w_{n-1}\}$ de $S^{\perp}$ formada por vectores propios de $T|_{S^{\perp}}$, los cuales también son vectores propios de T.

Por último, siendo $V = S \oplus S^{\perp}$, $\{w_0\}$ base ortonormal de S y $\{w_1, w_2, ..., w_{n-1}\}$ base ortonormal de $S^{\perp}$, ambas formadas por vectores propios de T resulta que $\{w_0, w_1, ..., w_{n-1}\}$ es una base ortonormal de V formada por vectores propios de T.

$\square$

Proposición 171. *Sea V un espacio vectorial complejo ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de dimensión finita. Si existe una base ortonormal de V formada por vectores propios de T y los valores propios de T tienen módulo 1 entonces T es unitaria.*

Demostración:
Sea $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base ortonormal de V formada por vectores propios de T, es decir que $T(v_i) = \lambda_i v_i$ con $|\lambda_i| = 1$.

Luego

$$A = {}_B\left((T)\right)_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Utilizando el producto interno habitual en $\mathbb{C}^n$ se tiene:

$$\langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ |\lambda_i|^2 = 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

Por lo tanto las columnas de A son una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ (con el producto interno habitual) por lo que A es unitaria.

Como B es una base ortonormal de V y ${}_B(T)_B = A$ es unitaria se concluye que T es unitaria.

$\square$

7. EJERCICIOS: Transformaciones en espacios con producto interno

Ejercicio 103.

(EXAMEN MARZO 1994, EJERCICIO $N^o 3$)

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno sobre el cuerpo $\mathbb{R}$,
S un subespacio vectorial de V y $T : V \to V$ una transformación lineal.

1. Probar que S es invariante bajo $T \Leftrightarrow S^{\perp}$ es invariante bajo T^*.
2. Supondremos $dim(S) = 1$. Probar que S es invariante bajo $T \Leftrightarrow$ existe λ_0 valor propio de T tal que $S \subseteq N(T - \lambda_0 I)$.
3. Supondremos ahora que $dim(S) = 2$ y $dim(V) = 3$. Probar que S es invariante bajo $T \Leftrightarrow$ existe λ_0 valor propio de T tal que $Im(T - \lambda_0 I) \subseteq S$

Ejercicio 104.

Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x, y, z) = (7y - 6z,\ -x + 4y,\ 2y - 2z)$$

1. Hallar <u>todos</u> los subespacios de dimensión 1 invariantes bajo T.
2. Hallar <u>todos</u> los subespacios de dimensión 2 invariantes bajo T.

Ejercicio 105.

Se considera la transformación lineal $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ tal que ${}_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
siendo $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathcal{P}_2$. Hallar T^* en cada caso de los productos del ejercicio 96.

Ejercicio 106.

(EXAMEN MARZO 1990, EJERCICIO $N^o 2$)

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y B una base de V. Probar que existe un producto interno $\langle , \rangle$ en V para el cual B es ortonormal.
2. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ y $T : V \to V$ una transformación lineal.

   Probar que: T es diagonalizable $\Leftrightarrow$ existe un producto interno en V para el cual T es autoadjunta.

3. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ y $T : V \to V$ una transformación lineal diagonalizable.
   Si $S \subset V$ es un subespacio invariante bajo $T \Rightarrow S$ tiene una base formada por vectores propios de T.

EJERCICIO 107.

Hallar una matriz P con columnas ortonormales tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal siendo:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 108.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno

1. Sea S un subespacio de V y $T : V \to V$ una transformación lineal. Probar que si T es autoadjunta y S es invariante por $T \Rightarrow$ existe una base ortonormal de S formada por vectores propios de T
2. Se consideran $T_1 : V \to V$ y $T_2 : V \to V$ transformaciones lineales autoadjuntas. Probar que:
   a) T_1 y T_2 conmutan $\Leftrightarrow T_1 \circ T_2$ es autoadjunta.
   b) Si T_1 y T_2 conmutan $\Rightarrow$ los subespacios propios de T_1 son invariantes bajo T_2.
   c) T_1 y T_2 conmutan $\Leftrightarrow$ existe una base ortonormal de V en la cual T_1 y T_2 se diagonalizan simultáneamente

EJERCICIO 109.

Se considera $\mathcal{P}_1$ con el producto interno: $< p, q >= \int_0^1 p(t)q(t)\ dt$ y $I\!R^2$ con el producto interno habitual.
Sea $T : \mathcal{P}_1 \to I\!R^2$ tal que $T(p) = (a + \frac{b}{2}, \frac{b}{2\sqrt{3}})$ con $p : p(t) = a + bt \quad \forall t \in I\!R$
Probar que T es una isometría lineal.

EJERCICIO 110.

Se considera $\mathcal{M}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ con el producto interno $< A, B >= tr(B^tA)$ y $I\!R^4$ con el producto interno habitual. Sea $T : \mathcal{M}(\mathbb{R})_{2\times 2} \to I\!R^4$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \left(-\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c,\ \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c,\ \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c,\ d\right)$. Probar que T es una isometría lineal.

8. EJERCICIOS:Transformaciones lineales en espacios con producto interno. Unitarias.

Ejercicio 111.

Se considera $\mathcal{M}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ con el producto interno: $\langle A, B\rangle = tr(B^tA)$
Sea $T : \mathcal{M}(\mathbb{R})_{2\times 2} \to \mathcal{M}(\mathbb{R})_{2\times 2}$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix}$. Probar que T es unitaria.

Ejercicio 112.

Se considera $\mathbb{C}^2$ con el producto interno habitual. Sea $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tal que $T(1, 1) = (-i, i)$, y $T(1, -1) = (i, i)$. Probar T es unitaria

Ejercicio 113.

Sea V un espacio vectorial con producto interno, $T : V \to V$ una transformación lineal y S un subespacio de V invariante bajo T. Probar que si T es unitaria, entonces $T|_S$ es unitaria.

Ejercicio 114.

Sea V un espacio vectorial con producto interno y $T : V \to V$ una transformación lineal. Probar que si T verifica <u>dos</u> de las condiciones siguientes verifica también la restante

1. T es autoadjunta;
2. T es unitaria;
3. $T^2 = I$;

Ejercicio 115.

Sea A una matriz simétrica y real $n \times n$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de A

1. Probar que

   $traza(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ y
   $det(A) = \lambda_1.\lambda_2.\ldots.\lambda_n$

2. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ son no nulos y $\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \ldots = \lambda_n = 0$. probar que $rango(A) = r$. Si además A es idempotente (esto es $A^2 = A$) demostrar que $rango(A) = traza(A)$

Ejercicio 116.

Sea V un espacio con producto interno de dimensión finita y $S \subset V$ un subespacio no trivial. Si $T : S \to V$ es una transformación lineal tal que $||T(s)|| = ||s||$ $\forall s \in S$ demostrar que existe $\widetilde{T} : V \to V$ unitaria tal que $\widetilde{T}(s) = T(s)$ $\forall s \in S$.

Ejercicio 117.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y $T : V \to V$ una transformación lineal.

1. Demostrar que T es unitaria si y solo si T transforma vectores unitarios en vectores unitarios.
2. Probar que si T es unitaria entonces $||T|| = 1$. (Se recuerda que $||T|| = \sup_{||x||=1} ||T(x)||$).
3. ¿Si $||T|| = 1$ se cumple que T es unitaria? Demostrar o dar un contraejemplo.

Ejercicio 118.

Diremos que T es no negativa $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ T es autoadjunta y $\langle T(v), v\rangle \geq 0 \qquad \forall v \in V$
Probar que son equivalentes

1. T no negativa
2. T es autoadjunta y los valores propios de T son no negativos
3. $T = S^2$ para alguna transformación lineal $S : V \to V$ autoadjunta
4. $T = U^*U$ para alguna tranformación lineal $U : V \to V$
   (*A la transformación lineal S se le llama la raíz cuadrada de T*)

Ejercicio 119.

Diremos que T es positiva si T es nonegativa y $\langle T(v), v\rangle = 0$ si y sólo si v es el vector nulo.
En el espacio vectorial $I\!R^3$ con el producto interno habitual se considera la transformación lineal $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tal que $_B(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ siendo $B = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$

1. Hallar los valores y vectores propios de T
2. Probar que T es positiva

3. Hallar una matriz asociada a S (siendo S la raíz cuadrada de T

Probar que existe una única transformación lineal $S : V \to V$ no negativa tal que $S^2 = T$.

Ejercicio 120. *Mostrar que la matriz*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & e^{-i\theta} \\ ie^{i\theta} & -ie^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

es unitaria para todo valor real de θ.

Ejercicio 121. *¿ Qué condición debe cumplir un vector $0 \neq u \in \mathbb{C}^n$ para que el operador $H_u : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ definido por*

$$H_u(v) = v - \langle v, u\rangle u$$

sea unitario? Determine en función de las coordenadas de u la matriz asociada a H_u en la base canónica de $\mathbb{C}^2$.

Ejercicio 122. *¿ Existe un operador unitario $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ que cumpla que $T(1,1) = e^{i(2+i)}(1,1)$.*

Ejercicio 123. *Para las siguientes matrices A, encuentre una matriz unitaria P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1-i \\ 1+i & 5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 2+2i \\ 2-2i & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 124. *Mostrar que si P es una matriz ortogonal entonces $e^{i\theta}P$ es unitaria para todo valor real θ.*

Ejercicio 125. *¿ Qué condiciones debe cumplir un vector columna $w \in \mathbb{C}^n$ para que la matriz $U = id - ww^T$ sea unitaria?*

Ejercicio 126. *¿ Qué condiciones deben cumplir los números reales $\theta, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ para que la matriz*

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\phi_1}\cos(\theta) & -e^{i\phi_2}\operatorname{sen}(\theta) \\ e^{i\phi_3}\operatorname{sen}(\theta) & e^{i\phi_4}\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

sea unitaria?

Ejercicio 127. *Considere el operador $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido por:*

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{i\varphi}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^{-i\varphi}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

1. *Muestre que T es unitario(consideramos $\mathbb{C}^2$ con el producto usual).*
2. *Tomando combinaciones lineales de $\left(\begin{smallmatrix}1\\ i\end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix}1\\ -i\end{smallmatrix}\right)$ construya una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^2$ cuyas componentes sean reales y tal que*

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 128. *Dada $F := \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ encuentre una matriz unitaria U tal que $\overline{U}^T FU$ sea diagonal.*

EJERCICIO 129.

(EXAMEN FEBRERO 1994 EJERCICIO N^o 3)

1. Se considera un espacio vectorial V de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ con un producto interno $\langle , \rangle_1$.
   Dada una transformación lineal $T : V \to V$ se define la función $\langle , \rangle_2 : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que
   $$\langle v, w\rangle_2 = \langle T(v), w\rangle_1 \quad \forall v, w \in V$$
   Probar que T es positiva (respecto al producto interno $\langle , \rangle_1$) $\Leftrightarrow$ $\langle , \rangle_2$ es un producto interno en V.
2. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con el producto interno habitual:
   $$\langle x, y\rangle_1 = \sum_{i=1}^{i=n} x_i.y_i \quad \forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$
   la transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que
   $$T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, 2.x_2, 3.x_3, \cdots, n.x_n)$$
   y la función $\langle , \rangle_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que
   $$\langle x, y\rangle_2 = \sum_{i=1}^{i=n} i.x_i.y_i \quad \forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$
   a) Probar que T es autoadjunta (respecto al producto interno $\langle , \rangle_1$) con valores propios estrictamente positivos.
   b) Probar que $\langle , \rangle_2$ es un producto interno en $\mathbb{R}^n$.
   c) Probar que T es autoadjunta respecto al producto interno $\langle , \rangle_2$

d) Indiquemos por V al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con el producto interno $\langle , \rangle_2$ y por W al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con el producto interno $\langle , \rangle_1$.
Se considera la transformación lineal $S : V \to W$ tal que

$$S(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = (x_1, \sqrt{2}.x_2, \sqrt{3}.x_3, \cdots, \sqrt{n}.x_n)$$

Si $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de V probar que $S(\mathcal{B})$ es una base ortonormal de W.

Ejercicio 130. (Examen agosto de 2000, ej 6.) *Sea V espacio vectorial de dimensión finita con producto interno. S es un subespacio no trivial y $P_S : V \to V$ es la proyección ortogonal sobre S. Sea $T : V \to V$ tal que $T = Id - 2P_S$. Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justificar.*

1. *Existe B base ortonormal de V tal que* ${}_B(T)_B = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$
2. $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle \ \forall\ v, w \in V$ *(T es autoadjunta.)*
3. $\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle \ \forall\ v, w \in V$ *(T es unitaria.)*

Ejercicio 131. (Examen febrero de 2000, ej 9.) *Sea* $A = \begin{pmatrix} 5i & 5 \\ 5 & 5i \end{pmatrix}$. *Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justificar.*

1. *A es unitaria.*
2. *Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que λA es unitaria.*
3. *Existe P unitaria tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.*

Ejercicio 132. (Segundo parcial 1999.) *Sea $T : V \to V$* normal *(es decir que $T^* \circ T = T \circ T^*$). Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justificar.*

1. *Si λ es valor propio de T entonces $S_\lambda^\perp$ es invariante bajo T.*
2. *Los valores propios de T son reales.*
3. *Si los valores propios son 1 y -1 entonces T es unitaria.*

Ejercicio 133. (Segundo parcial 1999.) *Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tal que $T(1,0,0) = (1,0,0)$, $T(0,1,0) = 1/\sqrt{2}(0,i,i)$, $T(0,0,1) = 1/\sqrt{2}(0,1,-1)$. Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justificar.*

1. *T es unitaria.*
2. *T preserva la norma.*
3. *$T|_S$ es unitaria si $S = \{(x,y,z) : x = 0\}$.*

CAPíTULO 6

Interpretación geométrica en $\mathbb{R}^n$. Afinidades.

En este capítulo estudiaremos las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ desde un punto de vista geométrico (parte ya se ha visto durante el curso). Así veremos a $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ como el plano y el espacio sensible explicitando una identificación entre puntos y vectores. Usaremos el producto interno usual que define la distancia usual y estaremos trabajando con la geometría usual. También introduciremos un tipo particular de transformación entre puntos del espacio que nos permitirá estudiar los movimientos que el estudiante conoce de los cursos de secundaria.

Empezaremos por las transformaciones lineales ortogonales las cuales conservan la distancia (geométri-
camente se conocen dentro de los que se llaman movimientos), luego veremos las transformaciones lineales autoadjuntas y finalmente algún resultado para transformaciones lineales cualesquiera.

1. Clasificación de las transformaciones lineales ortogonales en $\mathbb{R}^2$

Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineal ortogonal se tiene que ${}_B(T)_B = A$ es una matriz ortogonal, donde B es una base ortonormal. Podemos incluso trabajar con $T(\vec{X}) = A\vec{X}$, donde $A = {}_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}}$ siendo $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$, ortonormal con el producto interno usual.

Si escribimos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

La ortogonalidad de A implica las ecuaciones

$$\begin{aligned} &a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \\ &a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \\ &a_{11}\, a_{12} + a_{21}\, a_{22} = 0, \end{aligned}$$

debido a que las columnas de A son una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Observar que se debe cumplir $|a_{ij}| \leq 1 \ \forall\, i, j = 1, 2$. Como $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$ consideramos $a_{11} = cos\, \varphi$ y

$a_{21} = sen\,\varphi$ con $\varphi \in [0, 2\pi)$ (basta escribir el complejo $a_{11} + ia_{21}$, de módulo 1, en notación polar).
En forma similar, como $a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$ hacemos $a_{12} = sen\,\psi$ y $a_{22} = cos\,\psi$ con $\psi \in [0, 2\pi)$. Pero como $a_{11}\,a_{12} + a_{21}\,a_{22} = 0$ resulta $cos\,\varphi sen\,\psi + sen\,\varphi cos\,\psi = sen\,(\varphi + \psi) = 0$.

Por lo tanto $\varphi + \psi = 0$ o $\varphi + \psi = \pi$ (estos son los dos resultados realmente diferentes).

Primer caso: $\psi = -\varphi$, la matriz queda

$$A = \begin{pmatrix} cos\,\varphi & -sen\,\varphi \\ sen\,\varphi & cos\,\varphi \end{pmatrix}$$

que representa un giro de ángulo φ (rotación de centro en el origen y ángulo φ en sentido antihorario).
Los ángulos los mediremos positivos en sentido antihorario por lo que valores negativos corresponderán al sentido horario.
Casos particulares:

Si $\varphi = 0$ tenemos para $A = Id$ y el movimiento es la identidad (caso particular de rotación).

Si $\varphi = \pi$, entonces $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ que representa una simetría central respecto al origen (la simetría central no es más que un giro de ángulo π).

Segundo caso: $\psi = -\varphi + \pi$, recordando que $cos\,(\pi - \varphi) = -cos\,\varphi$ y $sen\,(\pi - \varphi) = sen\,\varphi$, queda

$$A = \begin{pmatrix} cos\,\varphi & sen\,\varphi \\ sen\,\varphi & -cos\,\varphi \end{pmatrix}.$$

Observemos que este caso corresponde a una simetría axial y determinemos su eje de simetría (es inmediato que resulta un recta por el origen, falta obtener su vector director).

Una primera forma de hacer esto es observando que podemos escribir

$$\begin{pmatrix} cos\,\varphi & sen\,\varphi \\ sen\,\varphi & -cos\,\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\,\varphi & -sen\,\varphi \\ sen\,\varphi & cos\,\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La expresión anterior indica que el movimiento es el resultado de la composición de una simetría axial de eje la recta por el origen con vector director el primero de la base ortonormal B con un giro centro en el origen y ángulo φ.

Por lo tanto el movimiento representa una simetría axial de eje la recta por el origen y de vector director que forma un ángulo $\frac{\varphi}{2}$ con el primero de la base ortonormal B.

Otra forma de ver este resultado es observar que los únicos valores propios de A son 1 y -1 (no tiene valores propios complejos) y utilizar el teorema espectral que en este caso se cumple (¿por qué?) por lo que se tiene una base ortonormal B_0 tal que ${}_{B_0}(T)_{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ de donde deducimos que el movimiento representa una simetría axial de eje la recta por el origen y de vector director el primero de la base ortonormal B_0 o sea un vector propio de valor propio 1 de T.

Entonces tenemos solo dos casos generales posibles el giro y la simetría axial que es muy simple distinguirlos pues en el caso del giro se tiene que $det(A) = 1$ (movimiento directo) mientras que para la simetría axial $det(A) = -1$ (movimiento inverso).

---

2. Clasificación de las transformaciones lineales ortogonales en $\mathbb{R}^3$

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ortogonal ($T(\vec{X}) = A\vec{X}$ con A ortogonal) y χ_T su polinomio característico. Como χ_T es un polinomio de grado 3 a coeficientes reales debe tener una al menos una raíz real y si agregamos que las raíces deben tener módulo 1 por ser T ortogonal, debe tener raíz 1 o -1, valor propio de T con vector propio asociado v el cual lo tomamos de norma 1.

Si tomamos una base ortonormal que incluya a v, $C = \{v, u_1, u_2\}$, la ortogonalidad de T garantiza que $[u_1, u_2] = W$ es invariante por T. Así la matriz asociada en la base C tiene alguna de las siguientes formas:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & x & x \\ 0 & x & x \end{array}\right) \quad \text{ó} \quad \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & x & x \\ 0 & x & x \end{array}\right)$$

La ortogonalidad de la matriz conjuntamente con que v es vector propio asociado al valor propio 1, también justifican estos formatos (las columnas deben ser unas base ortonormal) y permite concluir la invariancia del subespacio generado por $\{u_1, u_2\}$.

Por lo tanto podemos considerar la restricción $T|_W : W \to W$ y $T|_W$ es ortogonal. La matriz asociada en la base $\{u_1, u_2\}$ de W es la representada por las cruces en los casos anteriores.

Como $dim(W) = 2$ es válido el análisis hecho para transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$ y se tiene que ${}_C(T)_C$ puede tener alguna de las siguientes cuatro formas:

$$\text{(I)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\varphi & -sen\,\varphi \\ 0 & sen\,\varphi & cos\,\varphi \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \text{(II)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\varphi & sen\,\varphi \\ 0 & sen\,\varphi & -cos\,\varphi \end{pmatrix}$$

$$\text{(III)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\varphi & -sen\,\varphi \\ 0 & sen\,\varphi & cos\,\varphi \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \text{(IV)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\varphi & sen\,\varphi \\ 0 & sen\,\varphi & -cos\,\varphi \end{pmatrix}$$

Caso (I): Corresponde a una rotación de eje la recta por el origen y dirección v y ángulo φ (en definitiva la rotación es sobre el plano W).

Casos particulares:

1. Si $\varphi = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la identidad (rotación de ángulo cero).
2. Si $\varphi = \pi \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ la simetría axial respecto de la recta por el origen con dirección v (rotación de ángulo π).

Caso (II): En la sección anterior se vio que la matriz $\begin{pmatrix} cos\,\varphi & sen\,\varphi \\ sen\,\varphi & -cos\,\varphi \end{pmatrix}$ es semejante a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ por lo tanto podemos elegir la base de W y por lo tanto la base $C = \{v, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2\}$ de forma que ${}_C(T)_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ la cual representa la simetría respecto del plano por el origen que contiene los vectores v y $\tilde{u}_1$ (observar que el plano corresponde al subespacio propio de T correspondiente al valor propio 1).

Caso (III): Observando que

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

se concluye que el movimiento resulta de la composición de la rotación de eje por el origen con dirección v y ángulo φ seguida de la simetría respecto del plano por el origen que determinan $\tilde{u}_1$ y $\tilde{u}_2$ (observar que este plano es sobre el cual se realiza la rotación y es perpendicular a la recta del giro).

Casos particulares:

1. Si $\varphi = 0$ se obtiene un caso particular del caso (I), solo que en esta oportunidad la base quedó en otro orden. ¿Cuál es el movimiento y cuáles sus elementos característicos?.
2. Si $\varphi = \pi \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ que corresponde a la simetría central de centro en el origen.

Caso (IV): En forma similar al caso (II) podemos elegir la base de W y por lo tanto la base $C = \{v, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2\}$ de forma que ahora ${}_C(T)_C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Este caso ya fue obtenido como caso particular del caso (I), solo que en esta oportunidad la base quedó en otro orden. ¿Cuál es el movimiento y cuáles sus elementos característicos?.

La siguiente tabla resume los casos encontrados y como determinar los en función de dos números característicos de la transformación lineal como lo son su determinante y la traza. Se considera B una base ortonormal convenientemente elegida.

${}_B((T))_B$	$det(T)$	$traza(T)$	Movimiento
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	1	3	Identidad
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	1	-1	Simetría axial respecto de recta
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\varphi & -sen\,\varphi \\ 0 & sen\,\varphi & cos\,\varphi \end{pmatrix}$	1	$1+2cos\,\varphi$	Rotación
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	-1	1	Simetría respecto de plano
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	-1	-3	Simetría central
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\varphi & sen\,\varphi \\ 0 & sen\,\varphi & -cos\,\varphi \end{pmatrix}$	-1	-1	Rotación seguida de simetría respecto de plano

---

3. Transformaciones ortogonales y autoadjuntas en $\mathbb{R}^n$

3.1. Transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^n$. Si bien se pierde la interpretación geométrica tangible dejamos un resultado válido para las transformaciones lineales ortogonales en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 172. *Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal ortogonal, entonces existe B base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ para la cual se tiene que la matriz asociada ${}_B(T)_B$*

tiene la forma

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}} & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}} & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \cos\varphi_1 & -\operatorname{sen}\varphi_1 \\ \operatorname{sen}\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{matrix}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} \cos\varphi_r & -\operatorname{sen}\varphi_r \\ \operatorname{sen}\varphi_r & \cos\varphi_r \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

donde los números no indicados son ceros.

Demostración:
Se omite en el caso general, estando demostrado para $n = 2$ y $n = 3$ en las secciones anteriores.

3.2. Tranformaciones autoadjuntas en $\mathbb{R}^n$. Este caso es simple pues al aplicar el teorema espectral tenemos que existe una base ortonormal (un sistema de coordenadas ortonormal) donde la matriz es diagonal o sea

$$_B(T)_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

donde los λ_i son los valores propios de T (reales por ser autoadjunta).

Así la interpretación es clara, T contrae ($|\lambda_i| < 1$) o expande ($|\lambda_i| > 1$), simetrizando ($\lambda_i < 0$) o no ($\lambda_i > 0$), las componentes en cada dirección de la base ortonormal.

Casos particulares:

1. $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda > 0$; o sea, $T = \lambda Id$.
   En este caso la contracción o expansión es la misma en todas las direcciones.

Es el caso del movimiento conocido, homotecia de centro en el origen y razón λ_i.

2. $|\lambda_i| = 1$ para todo $i = 1, ..., n$.
   En este caso se tiene que la transformación es ortogonal (matriz simétrica en una base ortonormal), que ya fue estudiada en detalle en capítulos anteriores.

---

4. Afinidades en $\mathbb{R}^n$

Vamos a considerar a $\mathbb{R}^n$ no solo como espacio vectorial, sino como espacio de puntos y vectores. En esencia tenemos n-uplas $(x_1, \cdots, x_n)$ de números reales. Estas n-uplas pueden mirarse como vectores o como puntos. Esta forma de ver las cosas no es nueva, pues al trabajar con el espacio ordinario operábamos así. De todos modos daremos algunas definiciones formales.

Definición 173 (Espacio afín)**.** *Una terna $A = (E, V, +)$, donde E es un conjunto no vacío que llamamos espacio de puntos, V es un espacio vectorial y $+$ es una operación $+ : E \times V \to E$ que llamaremos suma de puntos y vectores, es un espacio afín si $+$ tiene las siguientes propiedades:*

1. Dados $P, Q \in E$ existe un único $v \in V$ tal que $P + v = Q$.
2. Dados $P \in E$, $v, w \in V$ se cumple $P + (v + w) = (P + v) + w$
   (Obsérvese que $v+w$ es una suma de vectores definida en el espacio vectorial).

Diremos que A es de dimensión n si $dim\,(V) = n$ como espacio vectorial.

Si $B = A + v$ definimos la resta de puntos $B - A = v$.

Ejemplo 174.

Sea $E = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^n$, la segunda vez $\mathbb{R}^n$ está mirado como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con la suma de vectores y el producto por un escalar usuales.

Definimos para $x = (x_1, \cdots, x_n) \in E = \mathbb{R}^n$ y $v = (v_1, \cdots, v_n)$, $x + v = (x_1, \cdots, x_n) + (v_1, \cdots, v_n) = (x_1 + v_1, \cdots, x_n + v_n)$.

En definitiva es la definición usual de la suma de n-uplas. Por tanto $A = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, +)$ es un espacio afín.

Este será el caso que usaremos de aquí en adelante y llamaremos a A también $\mathbb{R}^n$.

Observar que se hacen indistinguibles los puntos y los vectores así como las dos sumas.

Definiciones 175.

Definición 176. *Llamamos recta r de punto de apoyo p_0 y dirección $v \neq \vec{0}$ al conjunto*

$$r = \{p \in \mathbb{R}^n \mid p = p_0 + \lambda\, v\,, \textit{con } \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$$

Definición 177. *Dos rectas r y s, se dicen paralelas si sus vectores de dirección son colineales.*

Definición 178. *Tres puntos $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ se dicen alineados si existe una recta r tal que $A, B, C \in r$.*

Observación 179 (ejercicio)**.**

Demostrar que dados dos puntos A y B distintos siempre hay una única recta r que los contiene (en esta forma de presentar el tema el axioma de que por dos puntos distintos pasa una y solo una recta se ha convertido en un teorema), y que para todo $C \in r$, $C = A + \lambda\,(B - A)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

En geometría nos interesa estudiar las transformaciones con ciertas particularidades (en espacios vectoriales eran las transformaciones lineales). En este sentido realizamos la siguiente definición.

Definición 180 (Afinidades)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función. Decimos que f es una afinidad si para toda terna de puntos A, B, C de puntos alineados $C = A + \lambda\,(B - A)$ se cumple $f\,(C) = f\,(A) + \lambda\,(f\,(B) - f\,(A))$ y $B - A = S - R$ implica $f(B) - f(A) = f(S) - f(R)$.*

Observación 181. *Se deduce que si f es una afinidad entonces lleva puntos alineados en puntos alineados.*

Demostrar que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una afinidad si transforma puntos alineados en puntos alineados y además lleva los puntos medios de segmentos en los puntos medios de los segmentos de los transformados por f (el punto medio del segmento $\overline{AB}$ es el punto C de coordenadas $C = A + \frac{1}{2}\,(B - A)$).

Ejemplos 182 (Afinidades)**.**

Ejemplo 183. *Dado* $p_0 \in \mathbb{R}^n$ *fijo,* $f(P) = p_0 \ \forall\, P \in \mathbb{R}^n$ *es una afinidad.*

Ejemplo 184. *Si* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una transformación lineal, entonces* T *es una afinidad.*

Ejemplo 185. *Dado* $v_0 \in \mathbb{R}^n$ *un vector fijo, definimos* $t_{v_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *la* *<u>traslación</u>* *de vector* v_0 *como*

$$t_{v_0}(P) = P + v_0 \ \forall\, P \in \mathbb{R}^n$$

Para todo $v_0 \in \mathbb{R}^n$ *se cumple que* t_{v_0} *es una afinidad. En particular* $t_{\vec{0}}$ *es la identidad.*

Observación 186. *Si* $v_0 \neq \vec{0}$ *entonces* t_{v_0} *no es una transformación lineal (pues* $t_{v_0}\left(\vec{0}\right) = v_0 \neq \vec{0}$*).*

Ejemplo 187 (ejercicio)**.** *Dada una traslación* t_{v_0} *y una transformación lineal* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *definimos* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *como* $f(P) = t_{v_0} \circ T(P)$*. Demostrar que* f *es una afinidad.*

En realidad este ejemplo agota las formas para hallar afinidades como lo muestra la siguiente proposición:

Proposición 188. *Dada* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una afinidad existen una traslación* t_{v_0} *y un transformación lineal* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, únicas, tales que* $f = t_{v_0} \circ T$*.*

<u>Demostración</u>:
Probemos la unicidad, eso nos dirá como definir t_{v_0} y T que resuelven el problema.

Sea $f = t_{v_0} \circ T$, entonces en particular $f\left(\vec{0}\right) = t_{v_0} \circ T\left(\vec{0}\right) = t_{v_0}\left(\vec{0}\right) = v_0$ o sea $v_0 = f\left(\vec{0}\right)$.

Para todo $P \in \mathbb{R}^n$ debe ser $f(P) = t_{f(\vec{0})} \circ T(P) = T(P) + f\left(\vec{0}\right)$.

Por tanto debe ser $f(P) - f\left(\vec{0}\right) = T(P)$.

Así, dada f, obtenemos los elementos en forma única que permitiría escribir $f = t_{v_0} \circ T$. Tomando $v_0 = f\left(\vec{0}\right)$ y $T(P) = f(P) - f\left(\vec{0}\right)$ solo resta probar que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $T(P) = f(P) - f\left(\vec{0}\right)$ es lineal.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda P = \vec{0} + \lambda\left(P - \vec{0}\right)$, como f es afín se tiene:

$$f(\lambda P) = f\left(\vec{0}\right) + \lambda\left(f(P) - f\left(\vec{0}\right)\right) \Rightarrow T(\lambda P) = \lambda T(P). \qquad \text{(i)}$$

Sean $P, Q \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned} T(P+Q) &= f(P+Q) - f\left(\vec{0}\right) \\ &= f(P+Q) - f(Q) + f(Q) - f\left(\vec{0}\right) \\ &= f(P+Q) - f(Q) + T(Q). \end{aligned}$$

Pero $P + Q = Q + \left(P - \vec{0}\right) \Rightarrow f(P+Q) = f(Q) + f(P) - f\left(\vec{0}\right)$, o sea

$$f(P+Q) - f(Q) = f(P) - f\left(\vec{0}\right) = T(P).$$

Se tiene entonces $T(P+Q) = T(P) + T(Q)$. (ii).

De (i) y (ii) se tiene que T es lineal.

$\square$

Observación 189. *Un caso particular de afinidades las dan las transformaciones que conservan la distancia, éstas se estudian en los cursos preuniversitarios bajo el nombre de movimientos.*

Sea ahora $\mathbb{R}^n$ con el producto interno usual, o sea si $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$ entonces $x.y = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$.

Definimos $\|x\| = \sqrt{x.x}$, como siempre, como la norma del vector x. La distancia entre x e y es por definición:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Definición 190 (Afinidad isométrica o movimiento)**.** *Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una afinidad isométrica (o movimiento), si para todo $P, Q \in \mathbb{R}^n$ se cumple $d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$.*

Ejemplo 191.

La tercer propiedad de más arriba dice que las traslaciones t_{v_0} son afinidades isométricas.

Ejemplo 192. *Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal ortogonal entonces es una afinidad isométrica.*

En efecto $\forall\, P, Q \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{ccc} d\left(T\left(P\right), T\left(Q\right)\right) & = & \left\|T\left(P\right) - T\left(Q\right)\right\| \\ & \underset{\downarrow}{T \text{ lineal}} & \\ & = & \left\|T\left(P - Q\right)\right\| \\ & \underset{\downarrow}{T \text{ ortogonal}} & \\ & = & \left\|P - Q\right\| = d\left(P, Q\right). \end{array}$$

Ejemplo 193. *Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es ortogonal y t_{v_0} es una traslación, entonces $t_{v_0} \circ T$ es una afinidad isométrica.*

Proposición 194. *Si f es una afinidad isométrica entonces es inyectiva.*

Demostración: Se deja como ejercicio.

Proposición 195. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ son afinidades isométricas, entonces la composición $f \circ g$ también lo es.*

Demostración: Se deja como ejercicio.

Observación 196. *Esta última propiedad muestra que el ejemplo 193 da efectivamente una afinidad isométrica.*

En realidad el ejemplo 193 agota todas las afinidades isométricas como lo indica la siguiente proposición:

Proposición 197. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una afinidad isométrica, la transformación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por*

$$T\left(P\right) = f\left(P\right) - f\left(0\right)$$

es una transformación lineal ortogonal.

Demostración:
En la proposición 188 se vio que la expresión $f = t_{f\left(\vec{0}\right)} \circ T$, única para la afinidad f, resultaba en la definición de T como se indica en esta proposición. En aquella oportunidad se probó que era lineal restando probar que T es ortogonal (aquí es donde interviene el hecho de que f no solo es una afinidad si no que se trata de una afinidad

isométrica).

Probemos que T conserva la norma:

$$\begin{aligned} \|T(P)\| &= \left\| f(P) - f\left(\vec{0}\right) \right\| \\ &= d\left(f(P), f\left(\vec{0}\right)\right) = d\left(P, \vec{0}\right) \\ &= \left\| P - \vec{0} \right\| = \|P\|. \end{aligned}$$

□

Resulta entonces que para poder clasificar todas las afinidades isométricas solo tenemos que clasificar las transformaciones lineales ortogonales lo cual ya lo hemos hecho en capítulos anteriores.

---

5. Clasificación de las afinidades isométricas en $\mathbb{R}^n$

5.1. Afinidades en $\mathbb{R}^2$. Los resultados anteriores permiten escribir toda afinidad isométrica $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como una composición de una $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineal ortogonal seguida de una traslación, con la siguiente expresión:

$$f = t_{f(\vec{0})} \circ T.$$

Recordando la clasificación hecha de las transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$ tendremos:

Primer caso: Si la traslación es la identidad, o sea si $f\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$, $t_{f(\vec{0})} = t_{\vec{0}} = Id$ se tiene que $f = T$ y tendremos la clasificación anterior: Rotación de centro en el origen (la identidad o simetría central como casos particulares) o una simetría axial.

Segundo caso: Si la traslación no es la identidad o sea si $f\left(\vec{0}\right) \neq \vec{0}$, $t_{f(\vec{0})} \neq Id$, teniendo en cuenta la transformación ortogonal T se tendrá:

Si T se representa por la matriz $A = \begin{pmatrix} cos\,\varphi & -sen\,\varphi \\ sen\,\varphi & cos\,\varphi \end{pmatrix}$ se tendrá:

1. Si $\varphi = 0 \Rightarrow f$ es solo la traslación
2. Si $\varphi = \pi \Rightarrow f$ es una simetría central seguida de una traslación, cuyo resultado es una simetría central de centro $\frac{1}{2} f\left(\vec{0}\right)$

3. Si φ es cualquiera $\Rightarrow f$ es una giro de ángulo φ y centro en el origen seguida de una traslación, cuyo resultado es un giro de ángulo φ y centro la intersección de la recta por el origen que forma un ángulo $\frac{\pi-\varphi}{2}$ con $f\left(\vec{0}\right)-\vec{0}$ y la recta perpendicular a $f\left(\vec{0}\right)-\vec{0}$ a distancia $\frac{\left\|f(\vec{0})\right\|}{2}$ del origen en la dirección de $f\left(\vec{0}\right)$.

   El centro de la rotación se encuentra a distancia $\frac{\left\|f(\vec{0})\right\|}{2\,cos\left(\frac{\pi-\varphi}{2}\right)}$ del origen.

Si T se representa por la matriz $A=\begin{pmatrix} cos\,\varphi & sen\,\varphi \\ sen\,\varphi & -cos\,\varphi \end{pmatrix}$, entonces f es una simetría axial seguida de una traslación, lo que se conoce como antitraslación.

5.2. Clasificación de las afinidades isométricas en $\mathbb{R}^3$. No haremos la clasificación en detalle, solo ordenemos lo que ya tenemos:
Si $t_{f\left(\vec{0}\right)}=id$ ($f\left(\vec{0}\right)=\vec{0}$) estos los movimientos posibles son los vistos en la interpretación geométrica de la transformaciones lineales ortogonales.
Si $f\left(\vec{0}\right)\neq\vec{0}$ y por lo mismo $t_{f\left(\vec{0}\right)}\neq id$ entonces a esos movimientos debe seguirlos la traslación de vector $f\left(\vec{0}\right)$.

5.3. Expresión afinidad isométrica como composición de simetrías respecto de hiperplanos. En esta parte veremos un resultado conocido en los cursos preuniversitarios de geometría, que todo movimiento (afinidad isométrica) plano puede escribirse a lo más como la composición de tres simetrías axiales.

Es también cierto que todo movimiento en $\mathbb{R}^3$ puede escribirse a lo más como la composición de cuatro simetrías respecto a planos (simetrías especulares). En general vale un resultado análogo en $\mathbb{R}^n$.

Definición 198. *Llamamos hiperplano H de $\mathbb{R}^n$ al conjunto de los puntos $P\in\mathbb{R}^n$ que satisfacen una ecuación de la forma:*

$$a_1\,x_1+a_2\,x_2+...+a_n\,x_n+b=0\ \ donde\ \ P=(x_1,...,x_n)\,.$$

Es fácil ver que si $\vec{v}=(a_1,\cdots,a_n)$ y si $P^0=\left(x_1^0,...,x_n^0\right)\in H$ se tiene $a_1x_1^0+...+a_nx_n^0=-b$, por lo que P está en H si y solo si $a_1\left(x_1-x_1^0\right)+...+$

$a_n \left(x_n - x_n^0\right) = 0$, o sea $\langle v, P - P_0 \rangle = 0$.

Podemos suponer que $\|v\| = 1$ (si no fuese así lo dividimos por su norma y sigue siendo válido).

Definición 199. *Una simetría $S_H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ respecto a H es una transformación que a cada punto $Q \in \mathbb{R}^n$ le hace corresponder "el simétrico respecto a H", formalmente:*

$$S_H(Q) = Q - 2\langle v, Q - P_0 \rangle v.$$

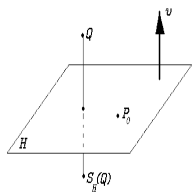


FIGURA 1. Simetría respecto a H

Proposición 200. *La simetría S_H es una afinidad isométrica.*

Teorema 201. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una afinidad isométrica. Entonces f puede escribirse como a lo mas la composición de $n+1$ simetrías respecto a hiperplanos.*

Demostración:
Si $f\left(\vec{0}\right) \neq \vec{0}$ sea H_0 el hiperplano de ecuación $\left\langle f\left(\vec{0}\right), P - \frac{f(\vec{0})}{2} \right\rangle = 0$.

Entonces la composición $S_{H_0} \circ f$ es una afinidad isométrica que cumple $S_{H_0} \circ f\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$. En efecto, si $v = \frac{f(\vec{0})}{\|f(\vec{0})\|}$ entonces la ecuación de H_0 puede escribirse:

$$\left\langle v, P - \frac{f(\vec{0})}{2} \right\rangle = 0 \text{ y}$$
$$S_{H_0}(Q) = Q - 2\left\langle v, Q - \frac{f(\vec{0})}{2} \right\rangle v.$$

Si $Q = f\left(\vec{0}\right)$ entonces queda:

$$S_{H_0}\left(f\left(\vec{0}\right)\right)=f\left(\vec{0}\right)-2\left\langle \frac{f\left(\vec{0}\right)}{\left\|f\left(\vec{0}\right)\right\|}, f\left(\vec{0}\right)-\frac{f\left(\vec{0}\right)}{2}\right\rangle \frac{f\left(\vec{0}\right)}{\left\|f\left(\vec{0}\right)\right\|}=f\left(\vec{0}\right)-\frac{\left\|f\left(\vec{0}\right)\right\|^2}{\left\|f\left(\vec{0}\right)\right\|^2} f\left(\vec{0}\right)=\vec{0}.$$

Por lo tanto $S_{H_0} \circ f$ es una transformación lineal ortogonal.

Probemos entonces que dada $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ortogonal existen no mas de n simetrías respecto a hiperplanos tales que T se escribe como la composición de esas simetrías.

Como $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es ortogonal transforma la base canónica $\{e_1, ..., e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ en una base ortonormal $\{T(e_1), ..., T(e_n)\}$.

Supongamos $e_1 \neq T(e_1)$.

Sea H_1 el hiperplano "bisector"de $\{e_1, T(e_1)\}$, formalmente H_1 tiene ecuación

$$\left\langle T(e_1) - e_1, P - \frac{T(e_1) + e_1}{2}\right\rangle = 0.$$

Obsérvese que H_1 pasa por el origen como era de esperar.

Si simetrizamos respecto a H_1 el punto $T(e_1)$ tenemos:

$$S_{H_1}(T(e_1)) = T(e_1) - 2\left\langle \frac{T(e_1) - e_1}{\|T(e_1) - e_1\|}, T(e_1) - \frac{T(e_1) + e_1}{2}\right\rangle \frac{T(e_1) - e_1}{\|T(e_1) - e_1\|} =$$

$$= T(e_1) - 2\left\langle \frac{T(e_1) - e_1}{\|T(e_1) - e_1\|^2}, \frac{T(e_1) - e_1}{2}\right\rangle (T(e_1) - e_1) = T(e_1) - T(e_1) + e_1 = e_1.$$

Entonces $S_{H_1} \circ T(e_1) = e_1$.

Sea $T_2 = S_{H_1} \circ T$. Si originalmente $T(e_1) = e_1$ entonces tenemos $T_2 = T$. En cualquier caso T_2 es una transformación lineal ortogonal que deja fijo a e_1.
Si $T_2(e_2) \neq e_2$, repetimos el procedimiento para la construcción de T, considerando el hiperplano bisector H_2 de ecuación:

$$\left\langle T_2(e_2) - e_2, P - \frac{T_2(e_2) + e_2}{2}\right\rangle = 0.$$

Componiendo $S_{H_2} \circ T_2$ se tiene:

$$\begin{aligned} S_{H_2} \circ T_2 (e_1) &= S_{H_2} (T_2 (e_1)) \\ &= S_{H_2} (e_1) \\ &= e_1 - 2\left\langle \tfrac{T_2(e_2)-e_2}{\|T_2(e_2)-e_2\|}, e_1 - \tfrac{T_2(e_2)+e_2}{2} \right\rangle \tfrac{T_2(e_2)-e_2}{\|T_2(e_2)-e_2\|} \\ &= e_1 - 2\left\langle \tfrac{T_2(e_2)-e_2}{\|T_2(e_2)-e_2\|}, e_1 \right\rangle \tfrac{T_2(e_2)-e_2}{\|T_2(e_2)-e_2\|} \\ &\quad -2\left\langle \tfrac{T_2(e_2)-e_2}{\|T_2(e_2)-e_2\|}, -\tfrac{T_2(e_2)+e_2}{2} \right\rangle \tfrac{T_2(e_2)-e_2}{\|T_2(e_2)-e_2\|}. \end{aligned}$$

Como $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ y $\langle e_1, T_2 (e_2) \rangle = \langle T_2 (e_1), T_2 (e_2) \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle = 0$ resulta $S_{H_2} \circ T_2 (e_1) = e_1$.

También $S_{H_2} \circ T_2 (e_2) = e_2$ (es la misma cuenta que la hecha para T).

Se tiene entonces que $T_3 = S_{H_2} \circ T_2$ deja fijos los vectores e_1 y e_2 y es ortogonal (si $T_2 (e_2) = e_2$ tomamos $T_3 = T_2$ con igual resultado).

Prosiguiendo de este modo y suponiendo que tenemos a $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal ortogonal que deja fijos los vectores $e_1, e_2, \cdots, e_{i-1}$ y que $T_i (e_i) \neq e_i$ se define $T_{i+1} = S_{H_i} \circ T_i$ donde:

$$S_{H_i} (P) = P - 2\left\langle \frac{T_i (e_i) - e_i}{\|T_i (e_i) - e_i\|}, P - \frac{T_i (e_i) + e_i}{2} \right\rangle \frac{T_i (e_i) - e_i}{\|T_i (e_i) - e_i\|}.$$

Tenemos entonces que $T_{i+1} (e_j) = e_j$ para $j = 1, ..., i$, si originalmente $T_i (e_i) = e_i$ tomamos $T_{i+1} = T_i$.

Repitiendo el procedimiento se llega a T_{n+1} que deja fijos a $e_1, e_2, ..., e_{n-1}, e_n$ y por lo tanto es la identidad.

Como $f = T$ ó $S_{H_0} \circ f = T$ y $(S_H)^{-1} = S_H$, llamando:

$$S_i = \begin{cases} S_{H_i} & \text{si } \ T_i (e_i) \neq e_i \\ id & \text{si } \ T_i (e_i) = e_i \end{cases} \qquad i = 1, ..., n \quad S_0 = \begin{cases} S_{H_0} & \text{si } \ f\left(\vec{0}\right) \neq \vec{0} \\ id & \text{si } \ f\left(\vec{0}\right) = \vec{0} \end{cases}$$

se tiene que: $S_n \circ \cdots \circ S_2 \circ S_1 \circ T = id$ y $S_0 \circ$ f $= T = S_1 \circ S_2 \circ \cdots \circ S_n$, por lo tanto

$$f = S_0 \circ S_1 \circ \ ... \ \circ S_n$$

y f se escribe como a lo mas el producto de $(n+1)$ simetrías respecto a hiperplanos.

$\square$

6. EJERCICIOS: Interpretación geométrica en $\mathbb{R}^n$.

EJERCICIO 134. (Examen agosto de 2000, ej 5.) *Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una simetría respecto de un plano por el origen π. Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justificar.*

1. *Existe B base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ tal que* $_B(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
2. *Si B y B' bases ortonormales existe P ortogonal tal que*
$$P\ _B(T)_B P^T = \ _{B'}(T)_{B'}$$
3. *$T \circ T \circ T$ es una rotación de ángulo 90 y eje de dirección normal a π.*

EJERCICIO 135. (Examen julio de 2003, ej 7.) *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x) = Ax$ con* $A = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$. *Clasificar (indicar si es una simetría, rotación) y hallar sus elementos (eje de simetría, ángulos, etc).*

EJERCICIO 136. (Examen agosto de 2000, ej 6.) *Sea V espacio vectorial de dimensión finita con producto interno. S es un subespacio no trivial y $P_S : V \to V$ es la proyección ortogonal de sobre S. Sea $T : V \to V$ tal que $T = Id - 2P_S$. Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justificar.*

1. *Existe B base ortonormal de V tal que* $_B(T)_B = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$
2. $\langle T(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle\ \forall\ v, w \in V$ *(T es autoadjunta).*
3. $\langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, w\rangle\ \forall\ v, w \in V$ *(T es unitaria).*

EJERCICIO 137. (Examen febrero de 2000, ej 10.) *Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformación ortogonal tal que en una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$*

$$_B(T)_B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Clasificar T (indicar si es una simetría, rotación, etc.) y hallar sus elementos (planos de simetría, ejes, ángulos, etc.)

EJERCICIO 138. (Examen julio de 2003, ej 2.) *Sea* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *simetría respecto de* $x + y - z = 0$. *Sean*

$$B = \{1/\sqrt{2}(1,0,1), 1/\sqrt{6}(-1,2,1), 1/\sqrt{3}(1,1,-1)\},$$

$$E = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

Hallar $\,_E(T)_E$. *Indicar si existe* P *ortogonal tal que* $P\,_B(T)_B P^T = \,_E(T)_E$. *Justificar.*

EJERCICIO 139. (Segundo parcial 1999.) *Sean*

$$T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

tales que

$$T_1(x,y) = 1/\sqrt{2}(x - y, x + y),\ T_2(x,y) = (y,x)$$

Clasificar $T_2 \circ T_1 \circ T_1$.

EJERCICIO 140. (Segundo parcial 1999.) *Sea* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *ortogonal tal que* $T(x,y,z) = (ax + y, x, z)$. *Hallar* a, *clasificar y hallar elementos.*

CAPíTULO 7

Formas cuadráticas

1. Definición, expresión matricial y ejemplos

Definición 202. *Un polinomio es "homogéneo", si todos sus monomios son del mismo grado.*

Definición 203 (Forma cuadrática)**.** *Una forma cuadrática en* $\mathbb{R}^n$ *es un polinomio con n variables, coeficientes reales, de grado 2, y homogéneo.*

Ejemplos 204.

Ejemplo 205. $x^2 + y^2 + zx$ *es una forma cuadrática en* $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$.

Ejemplo 206. $\sqrt{2}\, x_1 x_2 - \frac{1}{5} x_1 x_4$ *es una forma cuadrática en* $\mathbb{R}^{\mathbf{4}}$.

Observación 207 (Notación matricial)**.**

Considérese las matrices:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

donde A es una matriz simétrica o sea $a_{ij} = a_{ji}$ de números reales).

El producto de matrices $X^t A\, X$ es una matriz 1 por 1, o sea un término solo , que depende de $x_1, x_2, ..., x_n$

$$X^t A X = [x_1, ..., x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1^2 \; + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \\ a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + a_{n3}x_nx_3 + \ldots + a_{nn}x_n^2. \end{array}$$

Siendo A simétrica, se obtiene $a_{i\,j}\; x_i\, x_j \;\; = \;\; a_{j\,i}\, x_j\, x_i$, luego X^tAX es

$$a_{1\,1}\; x_1^2 \; + \; a_{2\,2}x_2^2 \; + \; \ldots \; + \; a_{n\,n}\; x_n^2 + 2a_{1\,2}\, x_1\, x_2 \; + 2a_{1\,3}\, x_1\, x_3 \; + \ldots + 2a_{n-1.n}\, x_{n-1}\, x_n$$

X^tAX es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$.

Inversamente , dada cualquier forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$, puede construirse la matriz simétrica A (escribiendo en la diagonal principal de A los coeficientes $a_{i\,i}$ de los términos x_i^2 ; y fuera de la diagonal , $a_{i\,j}$ es la mitad del coeficiente del término en $x_i\, x_j$).

TODA FORMA CUADRÁTICA EN $\mathbb{R}^n$ PUEDE ESCRIBIRSE DE FORMA ÚNICA COMO $X^t A\, X$ CON A MATRIZ $n \; \times \; n$ SIMÉTRICA. Con la definición de producto interno usual en $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, es fácil ver que toda forma cuadrática se escribe también como $< x, Ax >$, o bien $< Ax, x >$.

Ejemplo 208.

$$x^2 \; + \; y^2 \; + \; z\, x = X^t \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} X \text{ donde } X \; = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Cambio de variables:

Consideraremos cambios de variables lineales e invertibles:

$$\left(\begin{array}{lcl} x_1 & = & u_{1\,1}\, x'_1 \; + \; u_{1\,2}\, x'_2 \; + \; \ldots \; + \; u'_{1\,n}\, x'_n, \\ \vdots & & \\ x_n & = & u_{n\,1}\, x'_1 \; + \; u_{n\,2}\, x'_2 \; + \; \ldots \; + \; u'_{n\,n}\, x'_n, \end{array} \right.$$

tales que se puedan encontrar en forma única las variables nuevas, $x'_1, x'_2, \ldots.., x'_n$ en función de las viejas $x_1, \ldots.., x_n$.

En notación matricial : $X = UX'$ donde U es matriz $n \; \times \; n$ invertible,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x \quad 2 \end{bmatrix} \quad X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x' \quad 2 \end{bmatrix} \quad y\ U = \begin{bmatrix} u_{1\,1} & \cdots & u_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n\,1} & \cdots & u_{n\,n} \end{bmatrix}$$

La forma cuadrática $X^t AX$, al hacer el cambio de variables X = UX', queda expresada como sigue:

$(UX')^t\, A\, (UX')$, o lo que es lo mismo : $X'^{\,t}\ (U^t AU)\, X'$.

Por lo tanto la matriz de coeficientes de las nuevas variables es $B = U^t AU$ (B es simétrica, probarlo usado que $(QP)^t = P^t\, Q^t$)

---

2. Aplicación del teorema Espectral a las formas cuadráticas

Siendo A la matriz simétrica $n \times n$ real , el **Teorema Espectral**, ya visto, afirma lo siguiente :

Existe P matriz invertible ortogonal (o sea $P^{-1} = P^t$) tal que : $P^t AP = D$, donde D es la matriz diagonal constituida por los valores propios de A en la diagonal principal. Además las columnas de P son una base ortonormal de vectores propios de A.

Consecuencia: Sea $X^t AX$ una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$. Existe un cambio de variables $X = PX'$ invertibles (y ortogonal, o sea $P^{-1} = P^t$) tal que la forma cuadrática adquiere la expresión:

$$\lambda_1\, x'^2_1 + \lambda_2\, x'^2_2 + \ldots + \lambda_n\, x'^2_n$$

donde $\lambda_1, ..., \lambda_n$ son los valores propios de A.

Demostración:
Haciendo el cambio $X = PX'$, queda $X'^t(P^t AP)X'$.

Siendo $P^tAP = \mathrm{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ resulta $X'^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} X'$,o lo que es lo mismo:

$$\lambda_1\, {x'}_1^2 \; + \; \lambda_2\, {x'}_2^2 + \; \ldots \; + \lambda_n\, {x'}_n^2.$$

□

---

3. Expresión canónica de una forma cuadrática

Sea la forma cuadrática X^tAX. Aplicando el **Teorema espectral**, puede llevarse esta forma cuadrática, mediante un cambio lineal e invertible de variables (y además ortogonal) a la expresión:

$$\lambda_1\, {x'}_1^2 \; + \; \lambda_2\, {x'}_2^2 + \; \ldots \; + \lambda_n\, {x'}_n^2$$

con λ_1, $\lambda_2, ..., \lambda_n$ valores propios de A.

Se puede efectuar, ahora un nuevo cambio de variables, lineal e invertible , del siguiente modo:

Si $\lambda_i > 0 \;\; x''_i = \sqrt{\lambda_i}\, {x'}_i$

Si$\lambda_j < 0 \;\; x''_j = \sqrt{-\lambda_j}\, {x'}_j$

Si $\lambda_h = 0 \;\; x''_h = {x'}_h$

Resulta:

Si $\lambda_i > 0 \;\; {x''}_i^2 = \lambda_i {x'}_i^2$

Si $\lambda_i < 0 \;\; -{x''}_j^2 = \lambda_j {x'}_j^2$

Si $\lambda_h = 0 \;\; 0\,{x''}_h^2 = \lambda_h {x'}_h^2$

La forma cuadrática queda ahora expresada como la suma de algunos ${x''}_i^2$ menos los ${x''}_h^2$.

Reordenando los nombres de las incógnitas , para que queden primero las que van sumadas y luego las que van restadas , resulta : $\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \ \ldots \ + \tilde{x}_p^2 - \tilde{x}_{p+1}^2 - \ldots - \tilde{x}_{p+q}$
donde $p =$ cantidad de valores propios positivos de A y $q =$ cantidad de valores propios de A negativos.

Esa expresión se llama canónica.
Hemos probado que toda forma cuadrática puede llevarse mediante cambio de variables lineal o invertible a una expresión canónica.

Teorema 209 (Teorema de Silvester o Ley de Inercia)**.** *Sea X^tAX una forma cuadrática. Al hacer cambios de variables lineales e invertibles, pueden cambiar la matriz A , y sus valores propios, pero no cambia la cantidad de valores propios positivos ni la cantidad de valores propios negativos.*

No demostraremos este Teorema.

<u>Consecuencia</u>: Cada forma cuadrática tiene una <u>única</u> expresión canónica.

Ejemplo 210.

a) Sea $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 4yz$.

Buscar un cambio de variables lineal e invertible (y además ortogonal) de manera que se eliminen los productos de dos variables distintas.

Solución: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det\,(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \quad \begin{cases} \lambda = -1, \\ \lambda = \ \ 2, \\ \lambda = \ \ 5, \end{cases}$$

haciendo cambio de variables , $X = PX'$ quedará : $-{x'}^2 + 2{y'}^2 + 5{z'}^2$.

La matriz P tiene por columnas una base ORTONORMAL de vectores propios de A.
$\lambda = -1$ vectores propios de A : $(2z, -2z, z)$, con norma 1 elijo el vector $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

$\lambda = 2$ $(2y, y, -2y)$ elijo $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.
$\lambda = 5$ $(x, 2x, 2x)$ elijo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

$$P = \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Respuesta:

El cambio de variables

$$\begin{aligned} x &= 2/3\,x' - 2/3\,y' + 1/3z' \\ y &= -\,2/3\,x' - 1/3\,y' + 2/3z' \\ z &= 1/3\,x' + 2/3\,y' + 2/3z' \end{aligned}$$

lleva la forma cuadrática : $-{x'}^2 + 2{y'}^2 + 5{z'}^2$.

b) Buscar un cambio de variables lineal e invertible que lleve la forma cuadrática :$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 4yz$ a su forma canónica.

Solución: Primero , mediante el cambio ortogonal de la parte a) se llevó a :$-{x'}^2 + 2{y'}^2 + 5{z'}^2$

Ahora :$x'' = x' \quad y'' = \sqrt{2}\,y' \quad z'' = \sqrt{5}\,z'$

queda :$(y'')^2 + (z'')^2 - (x'')^2$.

Reordenando variables $\tilde{x} = y'' \quad \tilde{y} = z'' \quad \tilde{z} = x''$

queda : $\tilde{x}^{\,2} + \tilde{y}^{\,2} - \tilde{z}^2$ expresión canónica (es la única).

El cambio es $x = \frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z' = \frac{2}{3}x'' - \frac{2}{3\sqrt{2}}y'' + \frac{1}{3\sqrt{5}}z''$

o sea : $x = -\frac{2}{3\sqrt{2}}\tilde{x} + \frac{2}{3\sqrt{5}}\tilde{y} - \frac{2}{3}\tilde{z}$. Análogamente para y , z se obtiene;$y = -\frac{1}{3\sqrt{2}}\tilde{x} + \frac{2}{3\sqrt{5}}\tilde{y} - \frac{2}{3}\tilde{z}$.

$$z = \frac{2}{3\sqrt{3}}\tilde{x} + \frac{2}{3\sqrt{5}}\tilde{y} + \frac{1}{3}\tilde{z}\ .$$

Es el cambio pedido (no es único).

4. Estudio del signo de una forma cuadrática

Sea $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ vector de $\mathbb{R}^n$ (variable vectorial).

Sea $f(X)$ una forma cuadrática. Se observa que $f(0) = 0$.

Definición 211 (Clasificación de formas cuadráticas)**.** *Las formas cuadráticas en $\mathbb{R}^n$ se clasifican en:*

- *DEFINIDAS POSITIVAS: Si $f(X) \geq 0 \forall\, X \in \mathbb{R}^n$ y $X = \vec{0}$ es el único vector tal que $f(X) = 0$.*
- *SEMIDEFINIDAS POSITIVAS: Si $f(X) \geq 0 \forall\, X \in \mathbb{R}^n$ y $\exists\, X_0 \neq \vec{0}/\ f(X) = 0$.*
- *DEFINIDAS NEGATIVAS: Si $f(X) \leq 0\ \forall\, X \in \mathbb{R}^n$ y $X = \vec{0}$ es el único vector tal que $f(X) = 0$.*
- *SEMIDEFINIDAS NEGATIVAS: Si $f(X) \leq 0\ \forall\, X \in \mathbb{R}^n$ y $\exists\, X_0 \neq \vec{0}/\ f(X) = 0$.*
- *INDEFINIDA : Si no está incluida en ninguno de los casos anteriores o sea si $\exists\, X_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(X_0) < 0$ (no es POSITIVA) y además $\exists\, X_1 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(X_1) > 0$ (no es NEGATIVA).*

Observación 212. *Si la forma cuadrática es indefinida , existe un vector $X_2 \in \mathbb{R}^n$ tal que $X_2 \neq \vec{0}$ y $f(X_2) = 0$. (Pruébese, buscando algún λ real tal que $X_2 = \lambda\, X_0 + (1 - \lambda)\, X_1$).*

Ejemplos 213.

Ejemplo 214. *xy es indefinida en $\mathbb{R}^2$ porque en el vector $(1, 1)$ toma valor positivo y en el $(-1, 1)$ valor negativo.*

Ejemplo 215. *$x^2 + y^2 + z^2$ es definida positiva en $\mathbb{R}^3$ pero semidefinida positiva en $\mathbb{R}^4$ (¿por qué?).*

Ejemplo 216. *$a_1\, x_1^2\ +\ a_2\, x_2^2\ +\ \ldots\ + a_n\, x_n^2$ con $a_1\ >\ 0, \ldots\ , a_p\ >\ 0\,, a_{p+1}\ = 0\,,\ \ldots\ a_n = 0$ es semidefinida en $\mathbb{R}^n$, porqué $f(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i\ x_i^2\ \geq\ 0\ \forall\ x_1\,, x_2\,, \ldots\ , x_n$ Por ser $a_i\ \geq\ 0\ , \forall\ i$ entre 1 y n cuando $x_1\ =\ 0\,,\ \ldots\ , x_p\ =\ 0\,,\ x_{p+1} = 1\,,\ \ldots\ ,\ x_n = 1$ toma el valor 0.*

Teorema 217 (Teorema de clasificación)**.** *Sea la forma cuadrática X^tAX . Si los valores propios de A son:*

- *todos > 0 la forma es DEFINIDA POSITIVA,*
- *todos ≥ 0 y alguno = 0 la forma es SEMIDEFINIDA POSITIVA,*
- *todos < 0 la forma es DEFINIDA NEGATIVA,*
- *todos ≤ 0 y alguno = 0 la forma es SEMIDEFINIDA NEGATIVA,*
- *alguno > 0 y alguno < 0 la forma es INDEFINIDA.*

Demostración:

Como aplicación del Teorema espectral , se puede llevar a :

$$f(X) = \lambda_1 \, x_1^2 \; + \; \ldots \; + \; \lambda_n \, x_n^2$$

Si $\lambda_i \; > \; 0 \, , \forall i \;\; f(X) \; > \; 0 \, , \forall \, X$ excepto para $X = \vec{0}$ y por lo tanto la forma cuadrática es DEFINIDA POSITIVA.

Si $\lambda_i \; \geq \; 0$ y algún $\lambda_h \; = \; 0 \quad \Rightarrow \quad f(X) \; \geq \; 0$, y para el vector $X = (0, ..., x_h, ..., 0) \neq \vec{0}$ se obtiene $f(X) = 0$ y por lo tanto la forma cuadrática es SEMIDEFINIDA POSITIVA.

Los casos c) y d) se prueban igual , sustituyendo "¿"por "¡".

Si algún $\lambda_p > 0$ y algún $\lambda_h < 0$ sean los vectores $X_1 = (0 \, , \ldots \, , 0 \, , \; x_p, \, 0 \, , \ldots \, , 0 \,)$ y $X_0 \; = \; (0 \, , \ldots \, , 0 \, , \; x_h, \, 0 \, , \ldots \, , 0) \quad f\,(x_1) \;\; = \lambda_p \, x_p^2 \; > \; 0 \qquad f\,(x_0) \;\; = \;\; \lambda_h \, x_h^2 \;\; < \;\; 0$ y por lo tanto la forma cuadrática es INDEFINIDA.

□

Ejemplo 218. $x^2 + 2y^2 + 3\,z^2 + 4xy + 4yz \quad \Rightarrow \; A \; = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ *con valores propios -1 , 2 , 5, es INDEFINIDA.*

Definición 219. *Se llama índice de la forma cuadrática X^tAX a la cantidad de valores propios positivos (contados con su multiplicidad) de la matriz A; coíndice a la cantidad de negativos ; rango a la suma índice más coíndice; y signatura a la diferencia del índice menos el coíndice.*

Observación 220. *El rango de la forma cuadrática es igual al rango de la matriz A (Pruébese, recordando que rango de A es igual a $dim(Im(A))$, $dim(N(A) + dim(Im(A)) = n$ y $dim(N(A)) =$ multiplicidad de 0 como valor propio de A.*

Observación 221. *Conociendo el rango r y la signatura s se puede hallar el índice p y el coíndice q , pues:*

$$p = \frac{r+s}{2} \;\; y \;\; q = \frac{r-s}{2}.$$

Observación 222. *Conociendo p y q puede clasificarse la forma cuadrática (¿cuál es el criterio de clasificación?) y escribirse la expresión canónica.*

---

5. Formas cuadráticas degeneradas

Definición 223 (Formas cuadráticas degeneradas)**.** *La forma cuadrática X^tAX de $\mathbb{R}^n$, es degenerada si el rango es menor que n.*

Proposición 224. *Para una forma cuadrática X^tAX, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1) *Es degenerada.*
2) *0 es valor propio de A.*
3) $\exists\, Y \neq \vec{0},\ Y \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $X^tAY = 0,\ \forall\, X \in \mathbb{R}^n$.

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2) Usar la observación anterior.

Demostración: 2) $\Rightarrow$ 3) Sea Y vector proprio correspondiente al valor propio 0, entonces $X^tAY = X^t \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$

Demostración: 3) $\Rightarrow$ 1) Por hipótesis $X^tAY = 0$, $\forall\, X \in \mathbb{R}^n$, en particular, tomando $X = AY$, se tiene $(AY)^t\, AY = 0 \quad \Rightarrow < AY\,,\, AY > = 0$ con el producto interno usual de $\mathbb{R}^n \Rightarrow AY = \vec{0}$, con $Y \neq \vec{0} \Rightarrow 0$ es valor propio de A, rango de $A < n$ $\Rightarrow \quad X^tAX$ es degenerada.

$\square$

---

6. Otros métodos de clasificación de formas cuadráticas

Para clasificar una forma cuadrática $X^t AX$ no es necesario conocer los valores propios de A, sino su signo.

6.1. Regla de Descartes. Si el polinomio $a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ (con coeficientes reales) tiene todas las raíces reales, entonces LA CANTIDAD p de RAÍCES POSITIVAS es IGUAL A LA CANTIDAD DE CAMBIOS DE SIGNO DE LA SECUENCIA.

$$a_n \quad a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad \ldots \quad a_1 \quad a_0$$

donde los que son ceros no se toman en cuenta.

Por ejemplo : si $a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ tiene:

$$a_3 > 0 \begin{pmatrix} \text{un cambio} \\ \text{de signo} \end{pmatrix} a_2 < 0 \begin{pmatrix} \text{no hay cam -} \\ \text{bio de signo} \end{pmatrix} a_1 = 0 \begin{pmatrix} \text{no hay cam -} \\ \text{bio de signo} \end{pmatrix} a_0 < 0$$

entonces tiene una raíz positiva

Ejemplo 225.

Clasificar la forma cuadrática:

$$9x^2 + 9y^2 + 3z^2 + 6xy - 10\,xz - 6yz$$

$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -5 \\ 3 & 9 & -3 \\ -5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad det\,(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 21\,\lambda^2 - 92\lambda$ hay dos cambios de signo $\Rightarrow$ hay dos raíces positivas $p = 2$

El polinomio característico es $\lambda\,\left(-\lambda^2 + 21\lambda - 92\right)$ $\Rightarrow$ es divisible por $\lambda \Rightarrow$ el 0 es raíz simple (si fuera divisible por λ^k , el 0 sería raíz de multiplicidad k).

La cantidad de q de raíces negativas es $n - p - k$ con : $\left(\begin{array}{l} n = grado \\ p = \ raices\ positivas \\ k = \ raices\ nulas \end{array} \right.$

en este caso $q = 3 - 2 - 1 = 0$ NO HAY RAÍCES NEGATIVAS, SON DOS POSITIVAS Y UNA NULA $\Rightarrow$ FORMA SEMIDEFINIDA POSITIVA.

6.2. Método de Lagrange o de Completación de cuadrados. 1^er^ caso Si la matriz A tiene algún término en la diagonal $a_{i\,i} \neq 0$ (para fijar ideas , suponemos que es $a_{1\,1}$; sino hay que interpretar : donde dice 1, leer i). Reordenando la forma cuadrática , se pude escribir $a_{1\,1}\, x_1^2 + Px_1 + Q$ donde P y Q son polinomios (homogéneos) en las demás variables $x_2 , \ldots , x_n$ de grados 1 y 2 respectivamente.

Ejemplo 226.

$x_4x_3 \ + \ 2x_2x_1 \ + \ 2x_1^2 \ - 7x_3x_1$ se puede escribir como $2x_1^2 \ + (2\,x_2 - 7x_3)x_1 + x_4\ x_3$

verifíquese la siguiente identidad general :

$$a_{1\,1}x_1^2 \ + \ Px_1 \ + \ Q \ \equiv \ a_{11} \left(x_1 \ + \ \frac{P}{2a_{11}} \right)^2 \ + \ Q \ - \ \frac{P^2}{4a_{11}}.$$

Entonces haciendo el cambio de variables

$$x'_1 \ = \ x_1 \ + \ \frac{P\,(x_2, \ldots , x_n)}{2a_{11}} \qquad x'_2 \ = \ x_2, \ldots , x'_n \ = \ x_n$$

la forma cuadrática queda :
$a_{11}x'^2_1 \ + \ f_1\,(x'_2 , \ldots , x'_n)$ donde

$f_1 \ = \ Q \ - \ \frac{P^2}{4a_{11}}$ es una forma cuadrática nueva , que tiene <u>una</u> variable menos.

Volviendo al ejemplo concreto $2x_1^2 \ + \underbrace{(\,2x_2 \ - 7x_3)}_{P}\,x_1 \ + \underbrace{x_4x_3}_{Q}$

el cambio es $\begin{cases} x'_1 \ = \ x_1 \ + \ \frac{2x_2 \ - \ 7x_3}{2} \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 \ = \ x_3 \\ x'_4 \ = \ x_4 \end{cases}$

queda : $2x'^2_1 \ + \ x'_4x'_3 \ - \ \frac{2x'_2 \ - \ 7x'_3}{4\bullet 2} \ = \ \frac{p^2}{4a_{11}}$

o sea ; $2x'^2_1 \ + \ \underbrace{x'_4x'_3 \ - \ \frac{1}{2}x'^2_2 \ - \ \frac{49}{8}x'^2_3 \ + \ \frac{7}{2}x'_2x'_3}_{\text{nueva forma cuadrática} \qquad \mathrm{f}_1(x'_2, x'_3, x'_4)}$

En este ejemplo, podemos volver a aplicar el método a la nueva forma cuadrática

$$f_1 \;=\; \underbrace{-\frac{1}{2}x'^2_2}_{a_{11}} \;+\; \underbrace{\left(\frac{7}{2}x'_3\right)}_{\mathbf{P}}x'_2 \;+\; \underbrace{\left(x'_3x'_4 \;-\; \frac{49}{8}x'^2_3\right)}_{\mathbf{Q}}$$

Haciendo el cambio : $x"_2 = x'_2 - \left(\frac{7}{2}x'_3\right)/2\left(-\frac{1}{2}\right)$, $x"_3 = x'_3$, $x"_4 = x'_4$, $x"_1 = x'_1$

queda : $\underbrace{2x"^2_1}_{\text{YA OBTENIDO en el paso anterior}} \quad - \quad \underbrace{\frac{1}{2}x"^2_2}_{\text{OBTENIDOS en este paso}} \quad + \underbrace{\left(x"_3x"_4 - \frac{49}{8}x"^2_3\right)}_{\mathbf{Q}} - \underbrace{\frac{\left(\frac{7}{2}x"^2_3\right)}{4x\,(-1/2)}}_{\frac{P}{4a_{11}}}{}^2$

o sea $2x"^2_1 \;-\; \frac{1}{2}x"^2_2 \;+\; x"_3x"_4$ $\rightarrow$nueva forma cuadrática $f_2\,(x"_3\,,\,x"_4\,)$.

Ahora no podemos volver a aplicar el método a esta nueva forma cuadrática $x"_3x"_4$, porque no tiene ningún $a_{i\,i} \neq 0$.
Retomaremos este ejemplo, después de exponer el método general en el 2^{do} caso.

2$^{\text{do}}$ caso: Si una matriz A tiene toda su diagonal principal nula.
Entonces debe haber algún $a_{i\,j} \neq\; 0$ con $j \neq i$. Para fijar ideas suponemos que es $a_{1\,2}$; sino, hay que interpretar donde dice 1 leer i , y donde dice 2 leer j.
Reordenando la forma cuadrática, se puede escribir $a_{1\,2}x_1x_2 \;+\; Px_1 \;+\; Qx_2 \;+\; R$, donde P, Q y R son polinomios (homogéneos) en las demás variables $x_3, x_4, \ldots$, etc.

Ejemplo 227.

$$\begin{aligned}&4x_1x_2 + 2x_1x_4 + 3x_3x_4 - 5x_3x_2 + 7x_2x_4 = \\ &\quad = 4x_1x_2 + \underbrace{(2x_4)}_{=\ \mathbf{P}}\, x_1\underbrace{(-5x_3 \;+\; 7x_4)}_{=\ \mathbf{Q}}\, x_2 + \underbrace{3x_3x_4.}_{=\ \mathbf{R}}\end{aligned}$$

Verifíquese la siguiente identidad general:

$$\begin{aligned}\tfrac{a_{12}}{2}x_1x_2 + \;Px_1 \;+\; Qx_2 \;+\; R = \;\; & 2a_{12}\left(x_1 \;+\; x_2 \;+\; \tfrac{P\,+\,Q}{2a_{12}}\right)^2 \\ & - \tfrac{a_{12}}{2}\left(x_1 \;-\; x_2 + \tfrac{Q\;-\;P}{2a_{12}}\right)^2 + R \;-\; \tfrac{PQ}{2a_{12}}.\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$x'_1 \;=\; x_1 \;+\; x_2 \;+\; \frac{P\,+\,Q}{2a_{12}} \quad x'_2 \;=\; x_1 \;-\; x_2 \;+\; \frac{Q\;-\;P}{2a_{12}} \quad x'_3 \;=\; x_3 \;\ldots\; x'_n = x_n$$

se obtiene

$$\frac{a_{12}{x'}_1^2}{2} - \frac{a_{12}{x'}_2^2}{2} + f_1\left(x'_3, \ldots, x'_4\right)$$

donde $f_1\left(x'_3, \ldots, x'_4\right) = R - \frac{PQ}{2a_{12}}$ es una nueva forma cuadrática con dos variables menos.

En el ejemplo anterior $\underbrace{4x_1x_2}_{2a_{12}} + \underbrace{(2x_4)\,x_1}_{=P} + \underbrace{(-5x_3 + 7x_4)x_2}_{=Q} + \underbrace{3x_2x_4}_{=R}$

haciendo el cambio $\begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2 + \frac{2x_4 - 5x_3 + 7x_4}{4} = x_1 + x_2 - \frac{5}{4}x_3 + \frac{9}{4}x_4 \\ x'_2 = x_1 - x_2 - \frac{5}{4}x_3 + \frac{5}{4}x_4 \\ x'_3 = x_3 \\ x'_4 = x_4 \end{cases}$

queda :

$$\left(x'_1\right)^2 - \left(x'_2\right)^2 + \underbrace{3x'_3x'_4}_{R} - \underbrace{\frac{(2x'_4)\left(-5x'_3 + 7x'_4\right)}{4}}_{PQ/2a_{12}}$$

$$= {x'}_1^2 - {x'}_2^2 + \underbrace{\tfrac{11}{2}x'_3x'_4 - \tfrac{7}{2}{x'}_4^2}_{f_1\left(x'_3\ ,\ x'_4\right)\ nueva\ forma\ cuadratica}$$

reiterando el procedimiento a la nueva forma

$f_1 = \frac{11}{2}x'_3x'_4 - \frac{7}{2}{x'}_4^2$ entra en el caso 1 , porque -7/2 $\neq 0$.

$$-{x'}_1^2 - {x'}_2^2 - \tfrac{7}{2}{x'}_4^2 + \underbrace{\left(\tfrac{11}{2}x'_3\right)}_{=P}x'_4 = {x'}_1^2 - {x'}_2^2 - \tfrac{7}{2}\left(x'_4 - \tfrac{11}{4}x'_3\right) + \underbrace{\tfrac{121}{56}{x'}_3^2.}_{\frac{-\mathbf{P^2}}{\mathbf{4\,a_{11}}}}$$

Haciendo el cambio:

$$x"_4 = x'_4 - \tfrac{11}{14}x'_3 \quad x"_1 = x'_1 \quad x"_2 = x'_2 \quad x"_3 = x'_3$$

resulta:

$$\left(x"_1\right)^2 - \left(x"_2\right)^2 - \tfrac{7}{2}\left(x"_4\right)^2 + \tfrac{121}{56}\,{x"}_3^2\,.$$

Es <u>INDEFINIDA</u> (hay 2 coeficientes > 0 y $2 < 0$). La forma canónica es: $\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2 - \bar{x}_4^2$, se obtiene tomando : $\tilde{x}_1 = x"_1 \quad \tilde{x}_2 = \sqrt{\frac{121}{56}}x"_3 \ \tilde{x}_3 = x"_2 \quad \tilde{x}_4 = \sqrt{\frac{7}{2}}x"_4$.

Continuación del anterior: La nueva forma quedaba $x"_3 x"_4$ (entra en el caso 2)

$2x"_1^2 - 1/2 x"_2^2 + x"_3 x"_4$ haciendo el cambio

$$\begin{cases} \tilde{x}_3 = x"_3 + x"_4, \\ \tilde{x}_4 = x"_3 - x"_4, \\ \tilde{x}_1 = x"_1, \\ \tilde{x}_2 = x"_2, \end{cases}$$

queda:

$$2\hat{x}_1^2 - \tfrac{1}{2}\hat{x}_2^2 + \tfrac{1}{4}\hat{x}_3^2 - \tfrac{1}{4}\hat{x}_4^2$$

es <u>INDEFINIDA</u>. La forma canónica es, $\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 - \tilde{x}_3^2 - \tilde{x}_4^2$. Se obtiene tomando

$$\tilde{x}_1 = \sqrt{2}\hat{x}_1 \quad \tilde{x}_2 = \tfrac{1}{2}\hat{x}_3 \quad \tilde{x}_3 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{x}_2 \quad \tilde{x}_4 = \tfrac{1}{2}\,\hat{x}_4.$$

7. EJERCICIOS: Formas cuadráticas

Ejercicio 141.

Dada la matriz simétrica A.

1. Hallar una matriz <u>ortogonal</u> P tal que $P^t A P$ sea diagonal.
2. Clasificar la forma cuadrática cuya matriz asociada es A.

(i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ (iii) $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

(iv) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ (v) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (vi) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 142.

Clasificar las siguientes formas cuadráticas

1. $Q : I\!R^3 \to I\!R$ tal que $Q(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$.
2. $Q : I\!R^3 \to I\!R$ tal que $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$.
3. $Q : I\!R^4 \to I\!R$ tal que $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 9x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 - 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4$.
4. $Q : I\!R^4 \to I\!R$ tal que $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$.

Ejercicio 143.

Clasificar la forma cuadrática $Q : I\!R^6 \to I\!R$ tal que su matriz simétrica asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 9 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

(Sugerencia:*Aplicar el Teorema de Gershgorin).*

Ejercicio 144.

Sea $Q : I\!R^n \to I\!R$ una forma cuadrática definida positiva y A su matriz simétrica asociada.

1. Probar que $\langle , \rangle : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R$ tal que $\langle x, y\rangle = x^tAy$ es un producto interno en $I\!R^n$.
2. Probar que $\sqrt{Q(x+y)} \leq \sqrt{Q(x)} + \sqrt{Q(y)}$.
3. Sea D la matriz diagonal y P la matriz ortogonal tales que $D = P^tAP$
   Indiquemos por P_i a la i-ésima columna de P $(i = 1, 2, \cdots, n)$
   Probar que $\{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$ es una base ortogonal de $I\!R^n$ respecto al producto interno definido en (1).
4. Hallar una base ortonormal de $I\!R^n$ respecto del producto interno definido en (1).

Ejercicio 145.

(EXAMEN FEBRERO 1981, EJERCICIO $N^o 1$)

Sea $Q : I\!R^3 \to I\!R$ una forma cuadrática cuya matriz simétrica asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \lambda \in I\!R$$

1. Clasificar Q discutiendo según λ.
2. Para el valor de λ tal que 0 es valor propio de A, hallar una base del subespacio
   $S = \{x \in I\!R^3 \ : \ Q(x) = 0\}$.

Ejercicio 146.

Sea $Q : I\!R^n \to I\!R$ tal que $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2$.

Probar que Q es semidefinida positiva y que $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

(Sugerencia: *Aplicar la Desigualdad de Cauchy Schwarz a un par de vectores elegidos convenientemente).*

CAPíTULO 8

Superficies Cuádricas

1. Definición, notación matricial y formas reducidas

En lo que sigue, trabajaremos con las coordenadas (x, y, z) respecto a $\{0, i, j, k\}$ un sistema ORTONORMAL de coordenadas en el espacio euclídeo.

Definición 228. *Una Cuádrica es el lugar de los puntos P de coordenadas (x, y, z) que verifican una ecuación de 2do grado:*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0.$$

Observación 229 (Notación matricial)**.**

Si consideramos las matrices:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \text{(simétrica) } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

la ecuación de la cuádrica puede escribirse:

$$X^tAX + 2B^tX + c = 0.$$

Ejemplo 230. *La esfera unitaria*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

es una cuádrica.

Ejemplo 231. *La cuádrica $xy = 0$ es la unión de dos planos: el plano $x = 0$ y el plano $y = 0$.*

2. Cambio del sistema de coordenadas

Interesa estudiar como se altera la ecuación de una cuádrica, cuándo se pasa del sistema ortonormal dado $\{0, i, j, k\}$ a otro nuevo sistema ortonormal de coordenadas $\{0', i', j', k'\}$.
Sea $P = (x, y, z)$ en el sistema $\{0, i, j, k\}$. El mismo punto P tiene coordenadas nuevas (x', y', z') en el nuevo sistema $\{0', i', j', k'\}$.
Sea U la matriz de cambio de la base $\{i, j, k\}$ a la nueva base $\{i', j', k'\}$; o sea:

$$\begin{aligned} \vec{i'} &= u_{11}\vec{i} + u_{21}\vec{j} + u_{31}\vec{k} \quad (1) \\ \vec{j'} &= u_{12}\vec{i} + u_{22}\vec{j} + u_{32}\vec{k} \quad (2) \\ \vec{k'} &= u_{13}\vec{i} + u_{23}\vec{j} + u_{33}\vec{k} \quad (3). \end{aligned}$$

Como $U = (u_{ij})$ lleva una base ortonormal a otra también ortonormal , U es ORTOGONAL; o sea, real UNITARIA $U^t = U^{-1}$.
Sea Q el nuevo punto de origen de coordenadas: $Q = O + x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$ (4),
donde $P = O + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = Q + x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}$.

Se cumple, sustituyendo O' , $\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$ por las expresiones (1) , (2) (3) (4), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

En notación matricial :

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix},$$

resumiendo:

$$X = UX' + Q.$$

La ecuación de la cuádrica $X^tAX + 2B^tX + c = 0$ se convierte, mediante cambio del sistema (ortonormal) de coordenadas en:

$$X'^t \left(U^tAU\right) X' + \underbrace{X'^tU^tAQ + Q^tAUX'}_{\substack{iguales\,uno \\ traspuesto\ del\ otro \\ siendo\,1\times 1}} + Q^tAQ + 2B^tUX' + 2B^tQ + c = 0$$

$$X'^t\left(U^tAU\right)X' \;+\; 2\left(Q^tA \;+\; B^t\right)UX' \;+\underbrace{Q^tAQ+2B^tQ+C}\;=\;0$$

es la ecuación de la cuádrica dónde en lugar de X dice Q, o sea, en lugar de x, y y z dice x_0 , y_0 , z_0.
Si la ecuación de una cuádrica es $f(x,y,z) = 0$ entonces $Q^tAQ + 2B^tQ + c$ es $f\,(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$.
Resulta entonces:

$$X'^t\left(U^tAU\right)X' \;+\; 2 \underbrace{\left(Q^tA \;+\; B^t\right)}_{\text{es la transpuesta de } A^tQ+B=AQ+B} UX' \;+\; f\,(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0) \;=\; 0.$$

Queda : $X'^t\,(U^tAU)\,X' \;+\; 2\,(AQ \;+\; B)^t\,UX' \;+\; f\,(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0) \;=\; 0$

cuando hacemos el cambio de coordenadas

$$X = UX' \;+\; \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

en la cuádrica $X^tAX + 2B^tX + c = 0$.

Definición 232. *Se llama ecuación reducida de una cuádrica a la obtenida mediante un cambio de coordenadas ortogonal, cuando es de los siguientes tipos:*

tipo I: $\alpha\,x'^2 + \beta\,y'^2 + \gamma\,z'^2 + \delta = 0$,
tipo II: $\alpha\,x'^2 + \beta\,y'^2 + \gamma\,z' = 0$.

Veremos más adelante , que toda cuádrica tiene ecuación reducida.

---

3. Clasificación de Cuádricas

Según sea la ecuación reducida, las cuádricas se clasifican en:

Ecuación reducida de tipo I

$$\alpha\,x^2 + \beta\,y^2 + \gamma\,z^2 + \delta = 0.$$

Si $\delta \neq 0$ **:** $\frac{\alpha}{-\delta}\,x^2 \;+\; \frac{\beta}{-\delta}\,y^2 \;+\; \frac{\gamma}{-\delta}\,z^2 \;=\; 1.$
Según la secuencia de SIGNOS de

$$\frac{\alpha}{-\delta} \qquad \frac{\beta}{-\delta} \qquad \frac{\gamma}{-\delta}$$

DE LA CUÁDRICA.

- + + + elipsoide, ejemplo $3x^2 + y^2 + 4z^2 \; = 1.$

- + + - hiperboloide de una hoja, ejemplo $x^2 - 3y^2 + z^2 \; = 1.$

- + - - hiperboloide de 2 hojas, ejemplo $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y^2 - z^2 & = & 1 \end{array} \right.$

- - - - (NO ES NINGÚN PUNTO DEL ESPACIO ; CONJUNTO VACÍO).

- + + 0 cilindro elíptico.

- + - 0 cilindro hiperbólico, ejemplo $x^2 - y^2 = 1$ $\quad x^2 + 2y^2 = 1$ - - 0 $-x^2 - y^2 = 1$ (ecuación incompatible)

- + 0 0 dos planos paralelos, ejemplo $4x^2 = 1.$

- - 0 0 CONJUNTO VACÍO, ejemplo $-x^2 = 1$ ecuación incompatible.

Si $\delta = 0$ **:** o sea,

$$\alpha\, x^2 \; + \; \beta\, y^2 \; + \; \gamma\, z^2 \; = \; 0.$$

Según la secuencia de SIGNOS

$$\alpha \qquad \beta \qquad \gamma$$

DE LA CUÁDRICA.

- + + + un solo punto $x^2 + 2y^2 + z^2 = 0.$
- - - - un solo punto $-x^2 - 2y^2 - z^2 = 0.$
- + + - cono $x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$, cortando con planos $z = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} z \; = \; k, \\ x^2 \; + \; y^2 \; = \; k^2. \end{array} \right.$$

- + - - cono $-x^2 - 2y^2 + z^2 = 0.$
- + + 0 una recta $x^2 + y^2 = 0.$
- - - 0 una recta $-x^2 - y^2 = 0.$
- + - 0 dos planos que se cortan $x^2 - y^2 = 0.$

- + 0 0 un plano $x^2 = 0$.
- - 0 0 un plano.

Ecuación reducida de tipo II

$$\alpha\, x^2 \;+\; \beta\, y^2 \;+\; \rho\, z \;\;=\;\; 0 \quad \alpha\, x^2 \;+\; \beta\, y^2 \;=\; -\,\rho\, z$$

donde $\rho \neq 0$, sino sería una ecuación reducida de tipo I.
Según la secuencia de SIGNOS de $\alpha \quad \beta$ DE LA CUÁDRICA

- + + paraboloide elíptico, ejemplo $x^2 + 2y^2 = z$.
- - - paraboloide elíptico.
- + - paraboloide hiperbólico o silla de montar, ejemplo $4x^2 - 2y^2 = -2z$.
- + 0 cilindro parabólico, ejemplo $2x^2 = z$.
- - 0 cilindro parabólico.

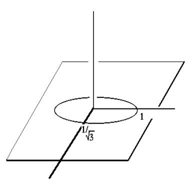
---

4. Representaciones en el espacio

ELIPSOIDE Ejemplo: $3x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$.
Cortando con el plano $z = 0$ se obtiene la elipse

$$\begin{cases} z = 0, \\ 3x^2 + \;\; y^2 = 1, \end{cases}$$

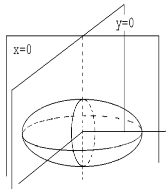
de semiejes $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, 1. Cortando con el plano $x = 0$ se obtiene la elipse



$$\begin{cases} x \;=\; 0, \\ y^2 + 4z^2 = 1. \end{cases}$$

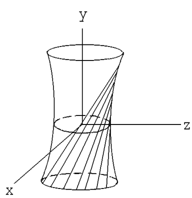
Cortando con el plano $y=0$; se obtiene la elipse

$$\begin{cases} y = 0. \\ 3x^2 + 4z^2 = 1. \end{cases}$$



HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA Ejemplo: $x^2 - 3y^2 + z^2 = 1.$
Cortando con el plano $y=0$ se obtiene la elipse

$$\begin{cases} y = 0, \\ x^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$



Cortando con el plano $z=0$ se obtiene la hipérbola

$$\begin{cases} z = 0, \\ x^2 - 3y^2 = 1. \end{cases}$$

Cortando con planos $y = cte$; obtenemos las elipses

$$\begin{cases} y = k, \\ x^2 + z^2 = 1 + 3k^2. \end{cases}$$

Estas superficies contienen RECTAS pues:

$$x^2 - 3y^2 + z^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3y^2 = 1 - z^2$$
$$\Leftrightarrow \left(x - \sqrt{3}y\right)\left(x + \sqrt{3}y\right) = (1 - z)(1 + z)$$

la recta

$$\begin{cases} x - \sqrt{3}y = 0, \\ 1 - z = 0, \end{cases}$$

está contenida en la superficie , porque el un punto que verifique la ecuación de la recta , verifica también la de la ecución de la superficie.

HIPERBOLOIDE DE 2 HOJAS Ejemplo: $-2x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
Cortando con el plano $y = 0$ se obtiene:

$$\begin{cases} y = 0, \\ -2x^2 - z^2 = 1. \end{cases}$$

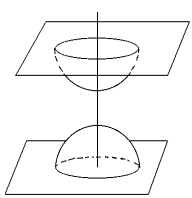
Cortando con el plano $x = 0$ obtenemos la hipérbola

$$\begin{cases} x = 0, \\ y^2 - z^2 = 1. \end{cases}$$

Cortando con los planos $y = k = cte$,

$$\begin{cases} y = k, \\ 2x^2 + z^2 = k^2 - 1, \end{cases}$$

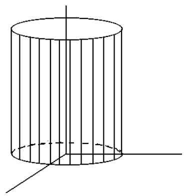
la intersección es una elipse si $|k| > 1$.



CILINDRO ELIPTICO Ejemplo: $x^2 + 2y^2 = 1$.
Si contiene a un punto $(x_0\,,\,y_0\,,\,0)$ entonces contiene a toda la recta

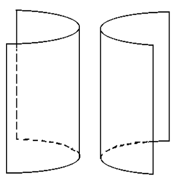
$$\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0, \\ z = \lambda. \end{cases}$$

Cortando con el plano $z = 0$, obtenemos la elipse



$$\begin{cases} z = 0, \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

CILINDRO HIPERBOLICO Ejemplo: $x^2 - y^2 = 1$.



DOS PLANOS Ejemplo:
$4x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ o $x = -\frac{1}{2}$ es la UNIÓN de dos planos paralelos.

UN PUNTO Ejemplo:

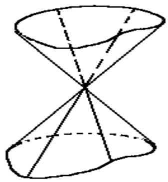
$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 0$$

como la suma de números ≥ 0 da $0 \Rightarrow$ los sumandos son todos 0. Por lo tanto $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ es un punto.

CONOEjemplo: $x^2 + 2y^2 + z^2 = 0$.
Cortando con los planos $z = k$,

$$\begin{cases} z = k, \\ x^2 + 2\,y^2 = k^2. \end{cases}$$

son elipses cuando $k \neq 0$
Si un punto x_0 , y_0 , z_0 verifica la ecuación dada:



$$x_0^2 + 2y_0^2 - z_0^2 = 0$$

entonces:

$$\begin{cases} x = \lambda\, x_0, \\ y = \lambda\, y_0, \\ z = \lambda\, z_0. \end{cases}$$

También verifica la ecuación:

$$x^2 + 2y^2 - z^2 = 0.$$

O sea: Si un punto $(x_0\,, y_0\,, z_0)$ pertenece a esta cuádrica , toda la recta por el origen y por el punto $(x_0\,, y_0\,, z_0)$ está contenida en esta cuádrica.

UNA RECTA Ejemplo: $x^2 + 2y^2 = 0$.
Lo que es equivalente a

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

UNION DE DOS PLANOS Ejemplo: $x^2 - y^2 = 0$. La ecuación anterior es equivalente a:

$$(x-y)(x+y) = 0 \Rightarrow x-y = 0 \text{ o sino } x+y = 0.$$

UN PLANO Ejemplo: $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.

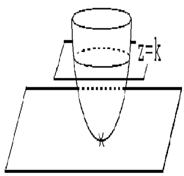
PARABOLOIDE ELIPTICO Ejemplo: $x^2 + 2y^2 = z$.
Cortando con el plano $x = 0$ obtenemos una parábola

$$\begin{cases} x = 0, \\ 2y^2 = z. \end{cases}$$

Cortando con los planos $z = k$,

$$\begin{cases} z = k, \\ x^2 + 2y^2 = k, \end{cases}$$

es una elipse si $k > 0$, es vacío si $k < 0$ y es un punto si $k = 0$.



PARABOLOIDE HIPERBOLICO O SILLA DE MONTAR Ejemplo: $-2x^2 + y^2 = z$.

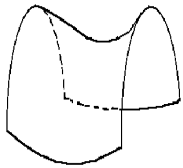
Cortando con el plano $x = 0$, obtenemos una parábola con concavidad hacia $z > 0$,

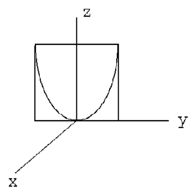
$$\begin{cases} x = 0, \\ z = y^2. \end{cases}$$

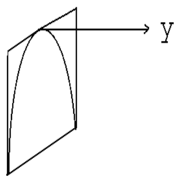
Cortando con el plano $y = 0$otenemos una parábola con concavidad hacia $z < 0$,

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = -2x^2. \end{cases}$$

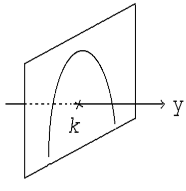
Cortando con el plano $y = k$ da una parábola con concavidad hacia $z < 0$,



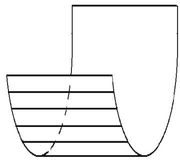




$$\begin{cases} y = k, \\ z = -2x^2 + k^2. \end{cases}$$



CILINDRO PARABOLICO Ejemplo: $2x^2 = z$.



---

5. Ecuación reducida de Cuádricas con Centro

Sea $X^t AX + 2B^t X + c = 0$ una cuádrica.

Definición 233 (Centro de una cuádrica)**.** *Se llama CENTRO Q a un punto $(x_Q\ , y_Q\ , z_Q)$ que verifica:*

$$A \begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{bmatrix} + B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Observación 234. *Si existe centro Q , porlo visto en la parte de cambio de coordenadas, trasladando el sistema de coordenadas al centro Q , $(X = X' + Q)$ queda:*

$$X'^t AX' + c = 0,$$

(se van <u>todos</u> los términos de 1^{er} grado).

Si un punto $(x'\ , y'\ , z')$ verifica esta ecuación , entonces $(-x'\ , -y'\ , -z')$ también la verifica.
Por lo tanto, el nuevo origen de coordenadas (o sea el centro Q) es un centro de SIMETRÍA de la superficie.

Observación 235. *El sistema de ecuaciones*

$$A\begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{bmatrix} + B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para hallar el centro, puede ser compatible determinado (hay un único centro), compatible indeterminado (hay infinitos centros) o incompatible (no hay centros).

Teorema 236. *Sea $f(x, y, z) = 0$ una cuádrica, con matriz simétrica A. Si existe algún centro $Q = \begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{bmatrix}$ y si P es una matriz ORTOGONAL que (por el Teorema Espectral) diagonaliza la matriz dada A,*

$$P^t AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots & 0 \\ & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

entonces haciendo el cambio de coordenadas $X = PX' + Q$ se obtiene la ecuación reducida de la cuádrica:

$$\lambda_1 ({x'}_1)^2 + \lambda_2 ({x'}_2)^2 + \lambda_3 ({x'}_3)^2 + f(x_Q , y_Q , z_Q).$$

<u>Demostración</u>:

Mediante la formula de cambio de coordenadas queda:

$$X'^t \left(P^t AP\right) X' + f(x_Q, y_Q, z_Q) = 0,$$

$$X'^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} X' + f(x_Q, y_Q, z_Q) = 0,$$

$$\lambda_1 {x'}_1^2 + \lambda_2 {x'}_2^2 + \lambda_3 {x'}_3^2 + f(x_Q , y_Q , z_Q) = 0.$$

□

Observación 237. *Para clasificar la cuádrica alcanza con conocer <u>cuántos</u> valores propios de A son > 0 , <u>cuántos</u> son negativos y cuántos cero, y el signo de $f(x_Q , y_Q , z_Q)$.*

---

6. Ecuación reducida de Cuádricas sin Centro

Si la cuádrica no tiene ningún centro , el sistema

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

es incompatible , entonces $det(A) = 0 \Rightarrow det(A - 0I) = 0$, 0 es valor propio de A.

Teorema 238. *Si la cuádrica no tiene centro , y si $\lambda_1, \lambda_2, 0$ son los valores propios de A, entonces la ecuación reducida es:*

$$\lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2 + \rho z' = 0 \textit{ con } \rho \neq 0.$$

Se observa que para clasificar la cuádrica, no se necesita conocer nada más sobre ρ.
El número ρ se puede calcular como se detalla en la prueba.
Demostración:

Sean $X^tAX + 2B^tX + c = 0$ la cuádrica y P una matriz cuyas columnas son una base ortonormal de vectores propios de A.
Haciendo el cambio de coordenadas (ortogonal) $X = PX'$ la ecuación queda:

$${X'}^t \left(P^tAP\right) X' + 2\left(B^t\right) PX' + c = 0;$$

o sea,

$${X'}^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X' + 2\left(B'\right)^t X' + c = 0$$

donde $B' = P^tB \quad ({B'}^t = P^tB)$.
Luego desarrollando:

$$\lambda_1 \left(x'\right)^2 + \lambda_2 \left(y'\right)^2 + 2{b'}_1 y' + 2{b'}_2 y' + 2{b'}_3 z' + c = 0 \ .(1)$$

donde

$$B' = \begin{bmatrix} {b'}_1 \\ {b'}_2 \\ {b'}_3 \end{bmatrix}.$$

1er caso: $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_3 = 0$.
Se verifica la siguiente identidad :

$$\lambda_1 \left(x'\right)^2 + \lambda_2 \left(y'\right)^2 + 2{b'}_1 x' + 2{b'}_2 y' + 2{b'}_3 z' + c$$

$$\equiv \lambda_1 \left(x' + \frac{b'_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{b'_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2b'_3 \left(z' + \frac{c - \frac{b'^2_1}{\lambda_1} - \frac{b'^2_2}{\lambda_2}}{2b'_3}\right).$$

Se puede probar que b'_3 siempre queda distinto de cero, pues si fuera cero la cuádrica tendría varios centros, que se obtendrían de la ecuación (1).

Haciendo el cambio de coordenadas (traslación) , siguiente:

$$x" = x' + \frac{b'_1}{\lambda_1} \quad y" = y' + \frac{b'_2}{\lambda_2} \quad z" = z' + \frac{c - \frac{b'^2_1}{\lambda_1} - \frac{b'^2_2}{\lambda_2}}{2b'_3},$$

resulta :

$$\lambda_1 (x")^2 + \lambda_2 (y")^2 + 2b'_3 z" = 0.$$

<u>Nota</u>:
b'_3 es el tercer miembro de la matriz $B' = P^t B$, donde B es dada y P es la matriz de pasaje ortogonal formada con <u>vectores</u> propios de A.

2$^{\mathbf{do}}$ caso: $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 0$ (entonces $\lambda_1 \neq 0$ sino el polinomio no sería de 2do grado).

Tenemos:

$$\lambda_1 (x')^2 + 2b'_1 x' + 2b'_2 y' + 2b'_3 z' + c = 0. \quad (2)$$

Se verifica la siguiente identidad:

$$\lambda_1 (x')^2 + 2b'_1 x' + 2b'_2 y' + 2b'_3 z' + c$$
$$\equiv \lambda_1 \left(x' + \tfrac{b'_1}{\lambda_1}\right)^2 + 2\sqrt{b'^2_2 + b'^2_3}\,\frac{\left(2b'_2 y' + 2b'_3 z' + c - \frac{b'^2_1}{\lambda_1}\right)}{2\sqrt{b'^2_2 + b'^2_3}}.$$

Se puede probar que b'_2 y b'_3 no son ceros a la vez o sea $b'^2_2 + b'^2_3 \neq 0$, porque de lo contrario la cuádrica tendría varios centros, que se obtendrían de la ecuación (2).

Consideremos el cambio:
$$\begin{cases} x" = x' + \frac{b'_1}{\lambda_1}, \\ y" = (b'_3 y - b'_2 z') \,/\, \sqrt{b'^2_2 + b'^2_3}, \\ z" = \dfrac{\left(2b'_2 y' + 2b'_3 z' + c - \frac{b'^2_1}{\lambda_1}\right)}{2\sqrt{b'^2_2 + b'^2_3}}, \end{cases}$$

que es de la forma $X" = Q' + UX$ con U ortogonal ($U^tU = I$):

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b'_3}{\sqrt{b'^2_2 + b'^2_3}} & \frac{-b'_2}{\sqrt{b'^2_2 + b'^2_3}} \\ 0 & \frac{b'_2}{\sqrt{b'^2_2 + b'^2_3}} & \frac{b'_3}{\sqrt{b'^2_2 + b'^2_3}} \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} b'_1/\lambda_1 \\ 0 \\ \frac{c - b'^2_1/\lambda_1}{2\sqrt{b'^2_2 + b'^2_3}} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación (2) y restando (3) queda:

$$\lambda_1 \left(x"_1\right)^2 \ + \ \lambda_2 \ \left(x"_2\right)^2 + \ 2\sqrt{b'^2_2 \ + \ b'^2_3}\, z" \ = 0.$$

Nota:

b'_2 y b'_3 son términos de la matriz $B^{'} = P^tB$.

6.1. EN RESUMEN. Para clasificar una cuádrica $f(x, y, z) = 0$, $X^tAX \ + \ 2B^tX \ + \ c \ = \ 0$, solo es necesario:

1) Saber si tiene o no centro, y si tiene elegir uno, Q; y calcular el signo de $f\left(x_Q, y_Q, z_Q\right)$.

2) Conocer el signo de los valores propios de A (no es necesario conocer los valores propios sino sólo su signo).

Es aplicable la regla Descartes para saber cuántas raíces positivas tiene el polinomio característico de A.

Ejemplo 239. *Clasificar*

$$9x^2 + 9y^2 + 3z^2 + 6xy - 10xz - 6yz + 28x + 12y - 16z + 15 \ = 0.$$

Solución:
Tiene infinitos centros $\left(3y_Q - 1, y_Q \ , 6y_Q + 1\right)$. Un centro es por ejemplo $Q = (-1, 0, 1)$
$f\left(x_Q, y_Q, z_Q\right) = -7 < 0$

$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -5 \\ 3 & 9 & -3 \\ -5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ $det\,(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 21\lambda^2 - 92\lambda$ una raíz es 0 (dos cambios de signo $\Rightarrow$ 2 raíces positivas)

Una raíz es 0, y las otras dos son positivas λ_1 y λ_2.

Ecuación reducida $\frac{\lambda_1}{7}{x'}_1^2 + \frac{\lambda_2}{7}{x'}_2^2 = 1$ CILINDRO ELÍPTICO.

Ejemplo 240. *Clasificar y hallar la ecuación reducida de:*

$$5x^2 - y^2 + z^2 + 6xz + 4xy + 2x + 4y + 6z - 8 = 0.$$

Solución:

$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ valores propios $\begin{cases} -2 \\ 7 \\ 0 \end{cases}$

No tiene centro $\Rightarrow$ ecuación reducida $-2{x'}^2 + 7{y'}^2 + \rho\, z' \; = 0 \Rightarrow$ PARABOLOIDE HIPERBÓLICO.

Para hallar la ecuación reducida, determinar el número ρ:

hallamos la matriz P de vectores propios ortonormales de A (no es única).

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 4/\sqrt{21} & 1/\sqrt{14} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{21} & 2/\sqrt{14} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{21} & -3/\sqrt{14} \end{bmatrix}$$

y luego calculamos $B' \;=\; P^t B \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$B' \;=\; \begin{bmatrix} -6/\sqrt{6} \\ 12/\sqrt{21} \\ 4/\sqrt{14} \end{bmatrix} \quad \rho \;=\; 2{b'}_3 \;\;=\; \frac{-8}{\sqrt{14}}.$$

Ecuación reducida: $-2x'^2 + 7y'^2 - \frac{-8}{\sqrt{14}} = 0$.

6.2. Cambios de coordenadas para pasar a la ecuación reducida. Sea la cuádrica

$$-x^2 + y\,z + 2\,x - 4\,z - 5 = 0.$$

En este caso

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Tiene un único centro $Q = (1, 4, 0)$. Llamando $F(x, y, z)$ al primer miembro de la ecuación dada de la cuádrica : $f(Q) = f(1, 4, 0) = -4$.

Aplicaremos el teorema de la ecuación reducida de una cuádrica con centro:

Polinomio característico de A es $X_A\ (\lambda) = -\ (1 + \lambda)\left(\lambda^2 - 1/4\right)$.

Los valores propios de A son : -1 , -1/2 , 1/2.

La ecuación reducida resulta:

$$-x'^2\ -\ \frac{1}{2}y'^2\ +\ \frac{1}{2}z'^2\ -\ 4\ = 0$$

De la clasificación expuesta, se obtiene que es un <u>hiperboloide de dos hojas.</u>

El cambio de coordenadas que permite pasar de la ecuación dada, a la reducida, es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$ donde P es una matriz ortogonal tal que:

$$P^t A P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Según el teorema espectral para matrices reales simétricas, las columnas de P son una base ortonormal de vectores propios de A. Hallemos una tal base:

$\lambda = -1$ vectores propios $(x, 0, 0)$ con $x \neq 0$.

$\lambda = -1/2$ vectores propios $(0, y, -y)$ con $y \neq 0$.

$\lambda = 1/2$ vectores propios $(0, z, z)$ con $z \neq 0$.

Una base ortonormal de vectores propios de A es:

$$\{(1,0,0), (0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2), (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)\}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$; de donde el cambio de coordenadas es

$$\begin{cases} x = x' + 1, \\ y = \sqrt{2}/2\, y' + \sqrt{2}/2\, z' + 4, \\ z = -\sqrt{2}/2\, y' + \sqrt{2}/2\, z'. \end{cases}$$

Verifíque que sustituyendo este cambio de coordenadas en la ecuación dada de la cuádrica , se obtiene su ecuación reducida.

La matriz P corresponde a una rotación. El cambio de coordenadas es una rotación compuesta con una traslación.

Sea la cuádrica $4\,z + x\,y = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Esta cuádrica no tiene centro. Los valores propios de A son $1/2$, $1/2$, 0.

El teorema de la ecuación reducida para cuádricas sin centro, afirma que $\frac{1}{2}x'^{\,2} - \frac{1}{2}\,y'^{\,2} - \rho\, z' = 0$ es ecuación reducida de la cuádrica.

Clasificación: es un <u>paraboloide hiperbólico</u>

Para tener la ecuación reducida habrá que calcular el número ρ. Hallemos ρ, y el cambio de coordenadas que permite pasar de la ecuación dada a la ecuación reducida, usando el procedimiento indicado en la prueba del teorema de ecuación reducida para cuádricas sin centro:

P es la matriz cuyas columnas son una base de vectores propios de A:
$\lambda_1 = 1/2$ vectores propios $(x, x, 0)$ con $x \neq 0$.
$\lambda_2 = -1/2$ vectores propios $(-y, y, 0)$ con $y \neq 0$.
$\lambda_3 = 0$ vectores propios $(0, 0, z)$ con $z \neq 0$.

Base ortonormal de vectores propios de A: $\{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), (0, 0, 1)\}$

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Haciendo el cambio $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ se obtiene la ecuación:

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + 2b'_1 y' + 2b'_2 y' + 2b'_3 z' + c = 0.$$

En nuestro caso: el término independiente c de la ecuación da es cero; $\lambda_1 = \frac{1}{2}$; $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Luego se tiene $\frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 + 4z' = 0$. Esta es la ecuación reducida (quedó $\rho = 4$).

En la prueba del teorema que usamos se hace un nuevo cambio de variables que, en nuestro caso , resulta $x" = x'$, $y" = y'$, $z" = z'$ porque $b'_1 = b'_2 = c = 0$.

El cambio de variables es:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y', \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y', \\ z = z'. \end{cases}$$

Verifique que sustituyendo este cambio de variables en la ecuación dada de la cuádrica, se obtiene la ecuación reducida. El cambio de variables es una rotación.

7. EJERCICIOS: Cuádricas

Ejercicio 147. *La ecuación de cierta hipersuperficie expresada en las coordenadas* (x^1, x^2, x^3, x^4) *correspondientes a la base canónica de* $\mathbb{R}^4$ *es* $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 = 1$. *Calcule la ecuación de la misma hipersuperficie en las coordenadas* (y^1, y^2, y^3, y^4) *correspondientes a la base*
$\{(1,1,1,1), (1,1,-1,-1), (1,-1,1,-1), (1,-1,-1,1)\}$.

Ejercicio 148. *Considere las formas cuadráticas en* $\mathbb{R}^3$*:*

$$Q_1(x_1, y_1, z_1) = 2x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2y_1z_1,$$
$$Q_2(x_1, y_1, z_1) = 4x_1^2 + y_1^2 + 9z_1^2 - 12x_1z_1.$$

¿ Existe alguna matriz P *tal que* $\overline{X} = PX$ *transforme la primera en la segunda? Caso afirmativo calcúlela.*

Ejercicio 149. *Estudie y dibuje las siguientes curvas del plano:*

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1 = 0,$$
$$5x^2 + 26xy + 5y^2 + 68x + 4y - 100 = 0,$$
$$x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0.$$

Ejercicio 150. *Haga un estudio lo más detallado posible de las superficies cuádricas que se indican(tipo, ecuación reducida, centro,..)*

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xz - 2xy - 2yz = 1,$$
$$2x^2 - 6y^2 - 2z^2 - 2xz + 10x - 6y = 1,$$
$$-2y^2 + xz - 4y + 6z + 5 = 0,$$
$$2x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 5xy - 2xz - 2yz - 2x - 2y + z = 0,$$

Ejercicio 151. *Clasificar la cuádrica* $3x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2yz + 4x + 2y - 5z + 7 = 0$ *encontrando, si los tiene, sus ejes.*

Ejercicio 152. *Considerar las cuádricas que admiten por ecuaciones*

$$x^2 - 2y^2 + \alpha z^2 - 2xz + 2yz + 2x + 1 = 0$$

para α *real. Estudiar para que valores de* α *es un paraboloide (elíptico o hiperbólico) y encontrar la ecuación del eje principal.*

Apéndices

Métodos númericos para calcular valores propios

Método de las Potencias. Esta sección fue extraída del libro "Numerical Analysis"de Colin Jaques & Ian Judd, ed. Chapman y Hall.

Introducción

En su forma más simple, este método parte de un vector cualquiera u_0 y genera una sucesión de vectores u_s definida por $u_{s+1} = Au_s \;\; s = 0, 1, 2, ...,$ (donde A es la matriz $n \times n$ cuyos valores y vectores propios queremos hallar).

Bajo ciertas condiciones que veremos más abajo, esta sucesión convergerá al vector propio asociado al valor propio de mayor módulo. Más concretamente, si tenemos una base formada por vectores propios, la sucesión convergerá al vector propio asociado al valor propio de mayor módulo (llamados vector y valor propio *dominantes*).

Teorema 241. *Sea A una matriz $n \times n$ con valores propios reales y distintos λ_i, y sean x_i vectores propios respectivamente, con $i = 1, 2, ..., n$.*
Si $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq ... \geq |\lambda_n|$, y si $u_0 = \sum\limits_{j=1}^{j=n} \alpha_j x_j$, con $\alpha_1 \neq 0$, entonces $u_s \underset{s\to\infty}{\sim} (\lambda_1^s \alpha_1)\, x_1$.

<u>Demostración</u>:

$$\begin{aligned} u_1 &= Au_0 = A\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n\right) \\ &= \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 + ... + \alpha_n A x_n \\ &= \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + ... + \alpha_n \lambda_n x_n \end{aligned}$$

(puesto que $Ax_i = \lambda_i x_i$). De manera similar, tenemos que:

$$\begin{aligned} u_2 &= Au_1 = A\left(\alpha_1\lambda_1 x_1 + \alpha_2\lambda_2 x_2 + ... + \alpha_n\lambda_n x_n\right) \\ &= \alpha_1\lambda_1 Ax_1 + \alpha_2\lambda_2 Ax_2 + ... + \alpha_n\lambda_n Ax_n \\ &= \alpha_1\lambda_1^2 x_1 + \alpha_2\lambda_2^2 x_2 + ... + \alpha_n\lambda_n^2 x_n. \end{aligned}$$

Continuando de igual modo, llegamos a : $u_s = \alpha_1\lambda_1^s x_1 + \alpha_2\lambda_2^s x_2 + ... + \alpha_n\lambda_n^s x_n$. Podemos sacar λ_1^s de factor común, con lo cual obtendremos :

$$u_s = \lambda_1^s\left[\alpha_1 x_1 + \alpha_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^s x_2 + ... + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^s x_n\right]. \tag{14}$$

Todos los términos dentro del paréntesis cuadrado, excepto el primero, tienden al vector nulo cuando $s \to \infty$, puesto que los cocientes $\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)$tienen módulo menor que 1. Por lo tanto $u_s \underset{s\to\infty}{\sim} \left(\lambda_1^s\alpha_1\right) x_1$, como queríamos probar.

$\square$

Definición 242. *Llamaremos valor propio dominante y vector propio dominante a λ_1 y x_1 respectivamente.*

Notemos que, mientras u_s converge al múltiplo de x_1, el coeficiente de dicho múltiplo construido en cada iteración del algoritmo, $\left(\lambda_1\right)^s \alpha_1$; cambia en cada iteración según s.

Si $|\lambda_1| > 1$, los elementos de u_s crecen sin cota cuando $s \to +\infty$, pudiendo producir "overflow" (se producen números mayores a los que la computadora puede manejar).

Por otro lado, si $|\lambda_1| < 1$, los elementos de u_s decrecerán a cero, lo cual puede llevar a la pérdida de cifras significativas (se producen números tan pequeños que la computadora los aproxima a cero).

Entonces, por motivos computacionales, es más conveniente reescalar en cada iteración, de modo que la componente de mayor módulo de u_s tenga módulo igual a uno. Por tanto, en la práctica es mejor performar el algoritmo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} v_{s+1} &= Au_s\ ,\ \ s = 0,1,2,... \\ u_{s+1} &= \frac{v_{s+1}}{\max(v_{s+1})}\ \ s = 0,1,2,... \end{aligned}$$

donde $\max\left(v_{s+1}\right)$ denota la componente de v_{s+1} de mayor módulo.

Notemos que el teorema que sirve de base al algoritmo no sufre mayores modificaciones con este cambio: la ecuación (14) es reemplazada por la ecuación

$$u_s = k_s \lambda_1^s \left[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^s x_2 + ... + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^s x_n \right] \tag{15}$$

donde $k_s = {}^1/_{[\text{máx}(v_1).\,\text{máx}(v_2)...\,\text{máx}(v_s)]}$. Vemos que u_s sigue "convergiendo" a un múltiplo del vector propio x_1 como antes. Como $u_s \sim kx_1$, entonces $Au_s \sim \lambda_1 u_s$, (mientras más avanzamos en la iteración, más y más se acercan los vectores u_s al vector propio dominante); esto es, $v_{s+1} \sim \lambda_1 u_s$. De aquí se deduce que los factores de reescalamiento, $\text{máx}(v_{s+1}) \sim \lambda_1$, porque la componente de mayor módulo de u_s tiene módulo uno.

Ejemplo 243. *Consideremos la matriz* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, *cuyos valores propios son 1,2 y 7, con vectores propios (1,2,-2); (-2,1,2) y (1,2,4) respectivamente.*

Los resultados del algoritmo partiendo del vector u_0= (1,1,1) son los siguientes:

s	u_s	v_{s+1}	$max(v_{\ s+1})$
0	(1,1,1)	(4,6,11)	11
1	(0.36,0.55,1)	(2.08,3.82,7.54)	7.54
2	(0.28,0.51,1)	(1.84,3.58,7.14)	7.14
3	(0.26,0.50,1)	(1.78,3.52,7.04)	7.04
4	(0.25,0.50,1)	(1.75,3.50,7.00)	7.00
5	(0.25,0.50,1)		

Es interesante notar a partir de la ecuación (14), que la tasa de convergencia depende de $\left({}^{\lambda_2}/_{\lambda_1} \right)^s$ y mientras mayor sea $|\lambda_1|$ comparado con $|\lambda_2|$ más rápida será la convergencia.

En el ejemplo anterior, $\left| {}^{\lambda_2}/_{\lambda_1} \right| = 2/7$, lo cual explica la rápida convergencia observada (se obtuvo el vector propio u_4 y el valor propio 7 en solamente 5 iteraciones).

Observación 244. *No entraremos en el caso en que existen dos valores propios dominantes, existiendo adecuada bibliografía al respecto.*

Ahora veremos como modificar el algoritmo para obtener una sucesión de vectores y escalares que converjan al valor propio de menor módulo y a un vector propio asociado a él.

Método de las potencias con desplazamiento. Supongamos ahora que la matriz A tiene valores propios reales λ_i, donde

$$\lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq ... \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_n$$

y consideremos la sucesión de vectores definida por:

$$\begin{aligned} v_{s+1} &= (A - p\,Id\,)\,u_s \quad s = 0, 1, 2, ... \\ u_{s+1} &= \frac{v_{s+1}}{\text{máx}(v_{s+1})} \quad s = 0, 1, 2, ... \end{aligned}$$

donde Id es la matriz identidad $n \times n$ y p es un parámetro real.

Este método se conoce como método de las potencias con desplazamiento pues la matriz $A - p\,Id$ tiene valores propios $\lambda_i - p$ (esto es, los valores propios de A son corridos o desplazados p unidades a lo largo del eje real).

El teorema que vimos puede aplicarse a la matriz $A - p\,Id$, con lo cual u_s convergerá al vector propio asociado al valor propio que maximiza $|\,\lambda_i - p\,|$, esto es, el λ_i que está más lejos de p. Usualmente el algoritmo se corre una vez con $p = 0$ (el método de las potencias ya visto), y una vez que se ha hallado el valor propio dominante λ_1, se corre de nuevo con $p = \lambda_1$, con lo cual obtenemos λ_n y su correspondiente vector propio.

Ejemplo 245. *Consideremos la matriz del ejemplo anterior. Ya sabemos que* $\lambda_1 = 7$. *Como teníamos* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, *entonces* $A - 7Id = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Corramos el algoritmo partiendo nuevamente de $u_0 = (1, 1, 1)$.

s	u_s	v_{s+1}	$max(v_{\ s+1})$
0	(1,1,1)	(-3,-1,4)	4
1	(-0.75,-0.25,1)	(4.00,1.75,-5.50)	-5.50
2	(-0.73,-0.32,1)	(3.92,2.14,-5.56)	-5.56
3	(-0.71,-0.38,1)	(3.84,2.48,-5.60)	-5.60
4	(-0.69,-0.44,1)	(3.76,2.82,-5.64)	-5.64
5	(-0.67,-0.50,1)	(3.68,3.16,-5.68)	-5.68
6	(-0.65,-0.56,1)	(3.60,3.50,-5.72)	-5.72
7	(-0.63,-0.61,1)	(3.52,3.79,-5.74)	-5.74
8	(-0.61,-0.66,1)	(3.44,4.08,-5.76)	-5.76
9	(-0.60,-0.71,1)	(3.40,4.35,-5.82)	-5.82
10	(-0.58,-0.75,1)	(3.32,4.59,-5.82)	-5.82
11	(-0.57,-0.79,1)	(3.28,4.81,-5.86)	-5.86
12	(-0.56,-0.82,1)	(3.24,4.98,-5.88)	-5.88
13	(-0.55,-0.85,1)	(3.20,5.15,-5.90)	-5.90
14	(-0.54,-0.87,1)	(3.16,5.27,-5.90)	-5.90
15	(-0.54,-0.89,1)	(3.16,5.37,-5.94)	-5.94
16	(-0.53,-0.90,1)	(3.12,5.44,-5.92)	-5.92
17	(-0.53,-0.92,1)	(3.12,5.54,-5.96)	-5.96
18	(-0.52,-0.93,1)	(3.08,5.61,-5.94)	-5.94
19	(-0.52,-0.95,1)	(3.08,5.66,-5.96)	-5.96
20	(-0.52,-0.95,1)	(3.08,5.71,-5.98)	-5.98
21	(-0.52,-0.95,1)		

Estos resultados indican que A-$7Id$ tiene como vector propio aproximado $(-0{,}52, -0{,}95, 1)$, con valor propio aproximado $-5{,}98$.

Por tanto, la matriz original A tiene el mismo vector propio con valor propio $-5{,}98 + 7 = 1{,}02$. Los valores exactos para x_3 y λ_3 son $(-0{,}5, -1, 1)$ y 1 respectivamente, por lo que el algoritmo dio resultados correctos hasta la primera cifra decimal.

La lentitud en la convergencia se debe a que A-$7Id$ tiene valores propios -6, -5 y 0, y por tanto la convergencia está dominada por $\left({}^{5}\!/\!_{6}\right)^{s}$, frente a la tasa de $\left({}^{2}\!/\!_{7}\right)^{s}$ del ejemplo 243.

En general, si $u_s \to x_1$, en presencia de un corrimiento p, la tasa de convergencia dependerá de $\left(\dfrac{\lambda_k - p}{\lambda_h - p}\right)^s$ (λ_k es el valor propio tal que $|\,\lambda_k - p\,|$ quedó como segundo mayor módulo después de $|\,\lambda_h - p\,|$), y por tanto una elección adecuada de p puede acelerar la convergencia.

Por ejemplo, supongamos una matriz B, 3×3, con valores propios 15,17 y 20. Entonces, sin corrimiento la tasa de convergencia dependerá de $\left({}^{17}\!/_{20}\right)^s$, mientras que con un corrimiento de 16, la tasa de convergencia dependerá de $\left({}^{1}\!/_{4}\right)^s$, pues B-16 Id tiene valores propios -1,1 y 4.

En general, no es trivial hallar el mejor valor de p. El conocer aproximadamente dónde están los valores propios es una gran ayuda, por lo cual este algoritmo suele usarse con el teorema de Gershgorin.

Método de las potencias inverso. El método de las potencias con desplazamiento solamente permite hallar los valores propios de mayor y menor módulo, y sus vectores propios correspondientes. Veremos ahora una nueva modificación que nos permitirá hallar todos los valores propios con sus correspondientes vectores propios.

Esto puede lograrse iterando con $(A - p\,Id)^{-1}$ en lugar de $A - p\,I$. El algoritmo queda

$$\begin{aligned} v_{s+1} &= (A - p\,Id)^{-1}\,u_s \quad\quad s = 0,1,2,... \\ u_{s+1} &= \frac{v_{s+1}}{\text{máx}(v_{s+1})} \quad s = 0,1,2,... \end{aligned} \tag{16}$$

Como $(A - p\,Id)\,x_i = (\lambda_i - p)\,x_i$, si premultiplicamos por $(A - p\,Id)^{-1}$, en ambos lados, obtendremos $x_i = (\lambda_i - p)(A - p\,Id)^{-1}\,x_i$, y si dividimos entre $(\lambda_i - p)$, obtendremos

$$(A - p\,Id)^{-1}\,x_i = \frac{1}{\lambda_i - p}\,x_i$$

por lo que $(A - p\,Id)^{-1}$ tiene los mismos vectores propios que A, pero asociados a valores propios ${}^{1}\!/_{(\lambda_i - p)}$.

Podemos aplicar el teorema visto a la matriz $(A - p\,Id)^{-1}$ y deducir que u_s convergerá al vector propio asociado al valor propio que maximiza $\left|\dfrac{1}{\lambda_i - p}\right|$, esto es, *el valor propio más cercano a* p.

Por tanto, eligiendo p adecuadamente, podemos lograr sucesiones que converjan a todos los valores y vectores propios asociados.

En la práctica, la matriz $(A - p\,Id)^{-1}$ jamás se calcula. Lo que se hace es reescribir (16) como

$$(A - p\,Id)\, v_{s+1} = u_s$$

y resolver dicho sistema de ecuaciones para hallar v_{s+1}. Es más, dicho sistema se resuelve haciendo la descomposición LU de la matriz $(A - p\,Id)$. Dicha descomposición no cambia con s, (aunque sí lo hace con p), por lo que nos sirve para resolver todos los sistemas de ecuaciones necesarios para ir hallando v_{s+1} para cada $s = 0, 1, 2, ...$

Si el valor propio más cercano a p es λ_j, entonces dicho valor λ_j puede calcularse a partir de $\max(v_s) \to \dfrac{1}{\lambda_j - p}$, esto es, $\lambda_j \approx \dfrac{1}{\max(v_s)} + p$.

Descomposición Polar

El siguiente teorema lo plantearemos para matrices complejas $n \times n$, caso más general.

Teorema 246 (Descomposición polar). *Sea A matriz compleja $n \times n$ con $det(A) \neq 0$ entonces existen dos matrices U matriz unitaria y S matriz hermítica tal que $A = U\,S$.*

Demostración:
Probemos en primer lugar que $M = \overline{A}^{\,t} A$ es hermítica:

$$\overline{M}^{\,t} = \overline{\overline{A}^{\,t} A}^{\,t} = \left(A^t \overline{A}\right)^t = \overline{A}^{\,t} A = M.$$

Como M es hermítica podemos aplicar el teorema espectral y se obtiene que

$$\exists\, C \text{ unitaria } (C^{-1} = \overline{C}^{\,t}) \text{ tal que } M = C\,D\,\overline{C}^{\,t}$$

donde D es una matriz diagonal,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

con $\lambda_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, ..., n$.
Probemos ahora que $\lambda_i > 0$ para todo $i = 1, ..., n$, para eso consideremos $\vec{X}$, vector propio de M asociado al valor propio λ_i. Por un lado se tiene que $\langle M\vec{X}, \vec{X}\rangle = \langle \lambda_i \vec{X}, \vec{X}\rangle = \lambda_i \langle \vec{X}, \vec{X}\rangle = \lambda_i ||\vec{X}||^2$.

Como $M = \overline{A}^{\,t} A$, se tiene que $\langle M\vec{X}, \vec{X}\rangle = \langle \overline{A}^{\,t} A\vec{X}, \vec{X}\rangle = \langle A\vec{X}, A\vec{X}\rangle = ||A\vec{X}||^2$.

Igualando se obtiene $\lambda_i ||\vec{X}||^2 = ||A\vec{X}||^2$, de donde se deduce que $\lambda_i > 0$ pues $det(A) \neq 0$, $\vec{X} \neq \vec{0}$ y las normas son positivas.

Definimos $S = C\,\sqrt{D}\,\overline{C}^{\,t}$ donde

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

La definición es posible pues $\lambda_i > 0$ para todo $i = 1, ..., n$.

Probemos que S es hermítica:

$$\overline{S}^{\,t} = \overline{\left(C\,\sqrt{D}\,\overline{C}^{\,t}\right)}^{\,t} = \left(\overline{C}\,\sqrt{D}\,C^{\,t}\right)^{t} = C\,\sqrt{D}\,\overline{C}^{\,t} = S$$

donde se usó en las igualdades centrales que $\sqrt{D}$ es real y simétrica.

Observando que, como $\lambda_i \neq 0$ ($\lambda_i > 0$) para todo $i = 1, ..., n$ (derivado del hecho que $det(A) \neq 0$), resulta que S es invertible pues $det(S) = det(\sqrt{D}) = \sqrt{\lambda_1}...\sqrt{\lambda_n} \neq 0$, se puede definir $U = A\,S^{-1}$ y así se tiene que $A = U\,S$.

Para finalizar la demostración del teorema solo resta probar que U es unitaria o sea que U es invertible y $U^{-1} = \overline{U}^{\,t}$.

$$\overline{U}^{\,t}U = \overline{(A\,S^{-1})}^{\,t}A\,S^{-1} = \overline{(S^{-1})}^{\,t}M\,S^{-1} = \left(\overline{S}^{\,t}\right)^{-1}M\,S^{-1} = S^{-1}M\,S^{-1}.$$

Sustituyendo $S^{-1} = \left(C\,\sqrt{D}\,\overline{C}^{\,t}\right)^{-1} = C\,(\sqrt{D})^{-1}\,\overline{C}^{\,t}$ y $M = C\,D\,\overline{C}^{\,t}$ en la igualdad anterior se obtiene:

$\overline{U}^{\,t}U = C\,(\sqrt{D})^{-1}\,\overline{C}^{\,t}C\,D\,\overline{C}^{\,t}\,C\,(\sqrt{D})^{-1}\,\overline{C}^{\,t} = C\,(\sqrt{D})^{-1}\,D\,(\sqrt{D})^{-1}\,\overline{C}^{\,t} = C\,\overline{C}^{\,t} = Id$ concluyéndose que U es invertible y $U^{-1} = \overline{U}^{\,t}$.

□

Observaciones 4 (Interpretaciones)**.**

Observación 247. *La expresión como producto matricial $A = U\,S$ muestra total semejanza con la notación polar de los números complejos donde U es una matriz "de módulo 1" (observar que al ser unitaria sus valores propios tienen módulo 1) que encerraría el "argumento" de la matriz (símil del argumento del complejo) y S es una matriz "real" (observar que al ser hermítica sus valores propios son reales) que encerraría el "módulo" de la matriz (símil del módulo del complejo).*

Observación 248. *De la demostración queda la expresión*

$$A = U\,S = (U\,C)\,\sqrt{D}\,\overline{C}^{\,t} = \mathcal{U}\,\sqrt{D}\,\mathcal{V}$$

donde $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son unitarias y $\sqrt{D}$ es diagonal.
Esta es la llamada **descomposición en valores singulares (S.V.D.) de la matriz A.**

Observación 249. *También es posible la interpretación geométrica para el caso real (A matriz real representando la transformación lineal* $T_A(\vec{X}) = A\vec{X}$*), la cual se deduce de lo trabajado anteriormente pues* $A = U\,S$ *con* U *ortogonal y* S *simétrica y ambos casos ya fueron estudiados.*