Transformaciones lineales en espacios con producto interno

Notas para el curso de Geometría y Algebra Lineal 2 de la Facultad de Ingeniería

Mathias Bourel y José Eduardo Diaz [1] .

En esta segunda parte del curso se relacionan los conceptos vistos en la primer mitad del semestre: la diagonalización de operadores con los espacios vectoriales con producto interno.

1. Funcionales Lineales. Representación de Riesz

Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

A las transformaciones lineales $T : V \to \mathbb{K}$ las llamamos **funcionales lineales.**

Ejemplo 1 *Sea V un espacio con producto interno sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Fijemos un vector $w \in V$ y definimos la transformación $f_w : V \to \mathbb{K}$ tal que*

$$f_w(v) \stackrel{def}{=} \langle v, w \rangle \qquad \forall\, v \in V \tag{1}$$

A partir de las propiedades del producto interno se deduce inmediatamente que f_w es un funcional lineal, llamado "multiplicación escalar por w".

El siguiente lema, consecuencia de la definición de producto interno, es fundamental en los resultados que le siguen.

Lema 1.1 *Sea V un espacio con producto interno.*
Si $\langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_2 \rangle$ para todo $v \in V$ entonces $w_1 = w_2$.

Demostración: Como

$$\langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_2 \rangle \quad \forall\, v \in V$$

usando las propiedades del producto interno, se deduce inmediatamente que

$$\langle v, w_1 - w_2 \rangle = 0 \quad \forall\, v \in V$$

Como la propiedad anterior se cumple para todos los vectores del espacio V, debe cumplirse también para el vector $w_1 - w_2$, por lo tanto

$$\langle w_1 - w_2, w_1 - w_2 \rangle = 0$$

de donde

$$w_1 - w_2 = \overrightarrow{0}.$$

es decir que

$$w_1 = w_2$$

[1] Estas notas fueron empezadas en el año 2005 por José Eduardo Diaz y completadas y corregidas en el año 2008 por Mathias Bourel

□

Veamos a continuación que todo funcional lineal en un espacio V de dimensión finita es la multiplicación escalar por algún vector del espacio.

Teorema 1.2 (Teorema de la representación de Riesz) *Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita.*
Si T es un funcional lineal sobre V entonces existe un único $w \in V$ tal que

$$T(v) = \langle v, w \rangle \qquad \forall v \in V \tag{2}$$

El vector w se le llama representante de Riesz *del funcional T.*

Demostración:
Unicidad: Si existen w_1 y w_2 en V tales que

$$T(v) = \langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_2 \rangle \qquad \forall v \in V$$

por el Lema 1.1 se tiene que $w_1 = w_2$, es decir que el representante de Riesz es único.
Existencia: Consideremos una base ortonormal $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ del espacio V.
Para determinar un vector $w \in V$ que cumpla (2) bastará con determinar sus coordenadas en la base ortonormal $\mathcal{B}$:

$$\langle w, e_i \rangle \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Luego el vector buscado será

$$w = \langle w, e_1 \rangle e_1 + \langle w, e_2 \rangle e_2 + \cdots + \langle w, e_n \rangle e_n$$

Ahora bien, queremos hallar un vector $w \in V$ tal que

$$T(v) = \langle v, w \rangle \qquad \forall v \in V$$

es decir que

$$T(v) = f_w(v) \qquad \forall v \in V \tag{3}$$

donde f_w es el funcional lineal definido en (1).
Por ser T y f_w lineales (3) es equivalente a[2]

$$T(e_i) = f_w(e_i) \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

de donde se deduce que las coordenadas de w en la base ortonormal $\mathcal{B}$ son:

$$\langle w, e_i \rangle = \overline{T(e_i)} \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

y por consiguiente

$$\boxed{w = \overline{T(e_1)}e_1 + \overline{T(e_2)}e_2 + ... + \overline{T(e_n)}e_n} \tag{4}$$

□

[2]Recordar que dos tranformaciones lineales coinciden en todo el espacio si y solo si coinciden en una base del espacio.

Observación 1.3 *Si bien la demostración dada del Teorema 1.2 es sencilla y constructiva (pues (4) nos da una fórmula para construir el vector w a partir del funcional T y de una base $\mathcal{B}$ ortonormal) no resalta las ideas geométricas presentes en la representación de Riesz. Veamos pues una demostración alternativa:*
Como $Im(T)$ es un subespacio de $\mathbb{K}$ y $\dim \mathbb{K} = 1$ tenemos que

$$\dim Im(T) = 0 \qquad o \qquad \dim Im(T) = 1$$

Primer caso: Si $\dim Im(T) = 0$. Entonces $Im(T) = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$, es decir que T es la transformación lineal nula y por consiguiente $w = \overrightarrow{0}$.
Segundo caso: Si $\dim Im(T) = 1$. Como para todo $v \in V$ se cumple que

$$v = P_{N(T)}(v) + P_{N(T)^{\perp}}(v)$$

resulta que

$$T(v) = T\left(P_{N(T)^{\perp}}(v)\right) \tag{5}$$

(en otras palabras el funcional T está completamente determinado por sus valores en $N(T)^{\perp}$).
Por otro lado, como $\dim N(T)^{\perp} = \dim V - \dim N(T) = \dim Im(T) = 1$, se tiene que

$$P_{N(T)^{\perp}}(v) = \langle v, e \rangle e \tag{6}$$

donde $\{e\}$ es una base ortonormal de $N(T)^{\perp}$
De (5) y (6) se deduce que

$$T(v) = T\big(\langle v, e \rangle e\big) = \langle v, e \rangle T(e) = \left\langle v, \overline{T(e)} e \right\rangle$$

de donde el representante de Riesz resulta:

$$\boxed{w = \overline{T(e)} e \qquad con\ e \in N(T)^{\perp} \quad y \ \|e\| = 1} \tag{7}$$

□

Veamos un ejemplo que muestra que el Teorema 1.2 no es válido en espacios vectoriales de dimensión infinita (aunque si es válido en espacios vectoriales de dimensión infinita con otras estructuras. Por ejemplo, en un espacio de Hilbert [3], todo funcional lineal acotado (continuo) tiene una única representación de Riesz; además se puede obtener una demostración de este resultado a partir de las ideas geométricas de la demostración dada en la Observación 1.3).

Ejemplo 2 *En el espacio vectorial $\mathcal{P}$ de los polinomios reales con el producto interno*

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x) dx \qquad \forall p, q \in \mathcal{P}$$

consideremos el funcional lineal $T : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ definido por:

$$T(p) = p(0)$$

[3] esto es, un espacio vectorial donde las sucesiones de Cauchy son convergentes respecto a la norma inducida por el producto interno.

Veamos que el funcional lineal T no tiene representación de Riesz. En efecto, supongamos que existe $q_0 \in \mathcal{P}$ tal que

$$T(p) = \langle p, q_0 \rangle \qquad \forall p \in \mathcal{P} \tag{8}$$

esto es

$$p(0) = \int_0^1 p(x)\, q_0(x) dx \qquad \forall p \in \mathcal{P} \tag{9}$$

Para cada $p \in \mathcal{P}$ definimos el vector $\widetilde{p} \in \mathcal{P}$ tal que

$$\widetilde{p}(x) = xp(x)$$

Aplicando (9) con el polinomio $\widetilde{p}$ se tiene que

$$0 = \int_0^1 xp(x)\, q_0(x) dx \qquad \forall p \in \mathcal{P}$$

esto es

$$0 = \langle p, \widetilde{q}_0 \rangle \qquad \forall p \in \mathcal{P}$$

por consiguiente

$$\widetilde{q}_0 = \overrightarrow{0}$$

de donde

$$q_0 = \overrightarrow{0}$$

y esto último junto con (8) implicaría que T es el funcional nulo, lo cual es falso. Entonces no existe $q_0 \in \mathcal{P}$ de modo que se cumpla (8).

---

2. Adjunta de una transformación lineal

Definición 2.1 *Sean V y W espacios vectoriales con producto interno sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y $T : V \to W$ una transformación lineal.*
Diremos que T tiene adjunta $\Leftrightarrow$ existe una función $T^* : W \to V$ tal que

$$\left\langle T(v), w \right\rangle_W = \left\langle v, T^*(w) \right\rangle_V \qquad \forall v \in V \;\; y \; \forall w \in W \tag{10}$$

El siguiente Teorema nos muestra que en dimensión finita toda transformación lineal tiene una única adjunta y que esta adjunta es una transformación lineal. En el caso de dimensión infinita esto no siempre es cierto (ver ejemplo 9 pág. 4) Sin embargo, en ambos casos si existe la adjunta es única.

Teorema 2.2 (Existencia y unicidad de la adjunta) *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita con producto interno sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$.*
Entonces toda transformación lineal $T : V \to W$ tiene una única transformación lineal adjunta.

Demostración:

Unicidad: Si existen $T_1^* : W \to V$ y $T_2^* : W \to V$ tales que

$$\langle T(v), w\rangle_W = \langle v, T_1^*(w)\rangle_V = \langle v, T_2^*(w)\rangle_V \qquad \forall v \in V \ \text{ y } \forall w \in W$$

por el Lema 1.1 se tiene que $T_1^*(w) = T_2^*(w) \ \ \forall w \in W$, esto es $T_1^* = T_2^*$.

Existencia: Dado $w \in W$ definimos el funcional lineal $T_w : V \to \mathbb{K}$ donde

$$T_w(v) = \langle T(v), w\rangle_W \tag{11}$$

La transformación T_w es lineal por ser la composición de la transformación lineal T con el funcional lineal f_w "multiplicación escalar por w".

Por el Teorema de la representación de Riesz existe un único vector en V, que indicaremos por $T^*(w)$ tal que

$$T_w(v) = \langle v, T^*(w)\rangle_V \tag{12}$$

De esta manera tenemos definida una aplicación $T^* : W \to V$. Además de (11) y (12) se tiene que

$$\langle T(v), w\rangle_W = \langle v, T^*(w)\rangle_V \tag{13}$$

Falta verificar que T^* es lineal, es decir que

$$T^*(\alpha w_1 + w_2) = \alpha T^*(w_1) + T^*(w_2) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ y } \forall w_1, w_2 \in W \tag{14}$$

Para todo $v \in V$, aplicando la propiedad (13) tenemos que:

$$\begin{aligned}
\langle v, T^*(\alpha w_1 + w_2)\rangle_V &= \langle T(v), \alpha w_1 + w_2\rangle_V \\
&= \overline{\alpha}\langle T(v), w_1\rangle_V + \langle T(v), w_2\rangle_V \\
&= \overline{\alpha}\langle v, T^*(w_1)\rangle_V + \langle v, T^*(w_2)\rangle_V \\
&= \langle v, \alpha T^*(w_1) + T^*(w_2)\rangle_V
\end{aligned}$$

y por el Lema 1.1 se obtiene (14)

$\square$

Ejemplo 3 *En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que*

$$T(x, y, z) = (x - y + 2z, \quad 4x - 3z, \quad x + 5y + z)$$

Para hallar $T^*(x, y, z)$ tratemos de determinar los valores de T^* en la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Por la propiedad que define a la adjunta se tiene que

$$\langle (x, y, z), T^*(1, 0, 0)\rangle = \langle T(x, y, z), (1, 0, 0)\rangle = x - y + 2z = \langle (x, y, z), (1, -1, 2)\rangle$$

Como lo anterior vale para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, usando el Lema 1.1 se concluye que

$$T^*(1, 0, 0) = (1, -1, 2)$$

Operando de la misma manera se obtiene que

$$T^*(0, 1, 0) = (4, 0, -3) \qquad y \qquad T^*(0, 0, 1) = (1, 5, 1)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} T^*(x,y,z) &= xT^*(1,0,0) + yT^*(0,1,0) + zT^*(0,0,1) \\ &= x(1,-1,2) + y(4,0,-3) + z(1,5,1) \\ &= (x+4y+z, \quad -x+5z, \quad 2x-3y+z) \end{aligned}$$

Verificar que $\left\langle (x,y,z), T^*(x',y',z') \right\rangle = \left\langle T(x,y,z), (x',y',z') \right\rangle$.

Ejemplo 4 *Consideremos el espacio vectorial* $\mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times n}$ *con el producto interno*

$$\langle A, B\rangle = tr(B^tA) \qquad \forall A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times n}$$

Dada una matriz $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times n}$ *se define la transformación lineal* $T : \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times n} \to \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times n}$ *tal que*

$$T(A) = MA \qquad \forall A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times n}$$

Hallemos T^**. Operando se tiene que*

$$\langle T(A), B\rangle = \langle MA, B\rangle = tr\big(B^t(MA)\big) = tr\left(\left(B^tM\right)A\right) = tr\left(\left(M^tB\right)^tA\right) = \left\langle A, M^tB\right\rangle$$

y como T^* *es el único operador que cumple*

$$\langle T(A), B\rangle = \left\langle A, T^*(B)\right\rangle \qquad \forall A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times n}$$

deducimos que

$$T^*(B) = M^tB \qquad \forall B \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times n}$$

Es decir que la adjunta de "multiplicar por M*" es la "multiplicación por* M^t *".*

Como comentamos antes, en el caso de dimensión infinita existen transformaciones lineales que no tienen adjunta. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 5 (*Una transformación lineal sin adjunta*) *En el espacio vectorial* $\mathcal{P}$ *de los polinomios reales con el producto interno*

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)\,q(x)dx \qquad \forall p, q \in \mathcal{P}$$

se considera la transformación lineal "derivada", definida por:

$$D : \mathcal{P} \to \mathcal{P} \quad \text{tal que } D(p) = p'$$

A partir de la fórmula de integración por partes se deduce que

$$\left\langle D(p), q\right\rangle = p(1)\,q(1) - p(0)\,q(0) - \left\langle p, D(q)\right\rangle \qquad \forall p, q \in \mathcal{P}$$

Veamos que la transformación lineal D *no tiene adjunta. En efecto, supongamos que exista una transformación lineal adjunta* $D^* : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$*. Luego se tiene que*

$$\left\langle p, D^*(q)\right\rangle = p(1)\,q(1) - p(0)\,q(0) - \left\langle p, D(q)\right\rangle \qquad \forall p, q \in \mathcal{P}$$

de donde

$$\left\langle p, \left(D^{*}+D\right)(q)\right\rangle = p(1)\, q(1) - p(0)\, q(0) \qquad \forall p, q \in \mathcal{P}$$

Si consideramos el polinomio $q_1 : q_1(x) = x - 1$ *se tiene que*

$$\left\langle p, \left(D^{*}+D\right)(q_1)\right\rangle = p(0) \qquad \forall p \in \mathcal{P}$$

Esto no puede ocurrir, pues si así fuera el funcional lineal "evaluación en 0", definido en el Ejemplo 2 pág. 3, tendría un representante de Riesz.

Proposición 2.3 ***(Propiedades de la adjunta)*** *Sean* V *y* W *espacios vectoriales con producto interno sobre un mismo cuerpo* $\mathbb{K}$.

1. *Si existen las adjuntas de las transformaciones lineales* $T_1 : V \to W$ *y* $T_2 : V \to W$ *entonces existe la adjunta de la transformación lineal* $T_1 + T_2 : V \to W$ *y se cumple que*

$$(T_1 + T_2)^{*} = T_1^{*} + T_2^{*}$$

2. *Si existe la adjunta de la transformación lineal* $T : V \to W$ *entonces, para todo* $\alpha \in \mathbb{K}$*, existe la adjunta de la transformación lineal* $\alpha T : V \to W$ *y se cumple que*

$$(\alpha T)^{*} = \overline{\alpha} T^{*}$$

3. *Si existen las adjuntas de las transformaciones lineales* $T : V \to W$ *y* $S : W \to V$ *entonces existe la adjunta de la transformación lineal compuesta* $S \circ T : V \to W$ *y se cumple que*

$$(S \circ T)^{*} = T^{*} \circ S^{*}$$

4. *Si existe la adjunta de la transformación lineal* $T : V \to W$ *entonces existe la adjunta de la transformación lineal adjunta* $T^{*} : W \to V$ *y se cumple que*

$$(T^{*})^{*} = T$$

5. *Sea* $T : V \to W$ *una transformación lineal para la cual existe la adjunta* $T^{*} : W \to V$.

   Entonces, T *es invertible* $\Leftrightarrow$ T^{*} *es invertible. Además se cumple que*

$$(T^{*})^{-1} = (T^{-1})^{*}$$

6. *Si* $Id : V \to V$ *es la transformación lineal identidad entonces* $Id^{*} = Id$.

7. *Sea* T *un operador en* V *para el cual existe el operador adjunto* T^{*}*. Entonces*

$$\lambda \text{ es un valor propio de } T \;\Leftrightarrow\; \overline{\lambda} \text{ es un valor propio de } T^{*}$$

Demostración:

Sólo probaremos 1 y 7 , las restantes propiedades quedan como ejercicio (ver práctico).

1. Sabemos que $(T+S)^*$ es la única transformación lineal que cumple :

$$(T+S)(v), w\rangle_W = \left\langle v, (T+S)^*(w)\right\rangle_V \qquad \forall v \in V \quad \forall w \in W$$

Como

$$\begin{aligned}\left\langle (T+S)(v), w\right\rangle_W &= \left\langle T(v)+S(v), w\right\rangle_W = \left\langle T(v), w\right\rangle_W + \left\langle S(v), w\right\rangle_W = \\ &= \left\langle v, T^*(w)\right\rangle_V + \left\langle v, S^*(w)\right\rangle_V = \left\langle v, T^*(w)+S^*(w)\right\rangle_V \\ &= \langle v, (T^*+S^*)(w)\rangle_V \qquad\qquad \forall v \in V \quad \forall w \in W\end{aligned}$$

concluimos que $(T+S)^* = (T^*+S^*)$.

7. $(\Rightarrow)$ Si λ es valor propio de T se cumple que $T-\lambda Id$ no es invertible. Luego por la propiedad 5 se tiene que$(T-\lambda Id\ )^*$ no es invertible. Pero, utilizando las propiedades 1, 2 y 6

$$(T-\lambda Id\ )^* = T^* - \overline{\lambda} Id$$

Es decir que $T^*-\overline{\lambda}Id$ no es invertible, y por consiguiente $\overline{\lambda}$ es valor propio de T^*

$(\Leftarrow)$ Si $\overline{\lambda}$ es valor propio de T^*, aplicando lo anterior, $\overline{\overline{\lambda}} = \lambda$ es valor propio de $(T^*)^*$; y por la propiedad 4 $(T^*)^* = T$. □

---

3. Representación matricial de la adjunta en bases ortonormales

Ahora estudiemos la representación matricial de la adjunta. Comencemos con un resultado sobre representación matricial en bases ortonormales

Lema 3.1 *Sean V y W espacios vectoriales con producto interno sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y $T: V \to W$ una transformación lineal. Si*

$$_C(T)_\mathcal{B} = M = ((m_{ij}))$$

donde $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ son bases ortonormales de V y W respectivamente, entonces

$$m_{ij} = \left\langle T(v_j), w_i\right\rangle_W$$

Demostración:

Por definición de matriz asociada la columna j de la matriz M es

$$M^{(j)} = \begin{pmatrix} m_{1j} \\ \vdots \\ m_{ij} \\ \vdots \\ m_{mj} \end{pmatrix} = coord_C\left(T\left(v_j\right)\right)$$

Siendo $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ una base ortonormal se cumple que

$$T(v_j) = \langle T(v_j), w_1 \rangle_W w_1 + ... + \langle T(v_j), w_i \rangle_W w_i + ... + \langle T(v_j), w_m \rangle_W w_m$$

de donde

$$coord_C(T(v_i)) = \begin{pmatrix} \langle T(v_j), w_1 \rangle_W \\ \vdots \\ \langle T(v_j), w_i \rangle_W \\ \vdots \\ \langle T(v_j), w_m \rangle_W \end{pmatrix}$$

por lo tanto $m_{ij} = \langle T(v_j), w_i \rangle_W$.

□

Proposición 3.2 *Sean V y W espacios vectoriales con producto interno sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y $T : V \to W$ una transformación lineal.*

Si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ son bases ortonormales de V y W respectivamente, entonces

$$_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{C}} = \overline{[_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{B}}]}^t.$$

Demostración:

Sean $M = ((m_{ij})) =_{\mathcal{C}} (T)_{\mathcal{B}}$ y $N = ((n_{ij})) =_{\mathcal{B}} (T^*)_{\mathcal{C}}$. Queremos probar que $N = \overline{M}^{\,t}$, es decir que

$$n_{ij} = \overline{m_{ji}}$$

Por el Lema anterior se tiene que

$$n_{ij} = \langle T^*(w_j), v_i \rangle_V = \overline{\langle v_i, T^*(w_j) \rangle_V} = \overline{\langle T(v_i), w_j \rangle_W} = \overline{m_{ji}}$$

□

---

4. Operadores autoadjuntos

En esta sección nos proponemos resolver el siguiente probLema fundamental:

Si T es un operador lineal en un espacio vectorial V con producto interno: ¿qué condiciones hay que verificar para garantizar la existencia de una base ortonormal de V formada por vectores propios de T? En otras palabras, ¿cuándo T se diagonaliza en una base ortonormal de V?

Comencemos deduciendo una condición necesaria, (que más adelante se verá, con el Teorema Espectral, que es suficiente).

Supongamos que existe una base ortonormal B del espacio V tal que

$$_B(T)_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Luego, por ser la base B ortonormal, se tiene que

$$_B(T^*)_B = \overline{_B(T)_B}^{\,t} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Entonces si los <u>valores propios de T son reales</u> se tiene que

$$T = T^* \tag{15}$$

Comencemos el estudio de los operadores que cumplen (15).

Definición 4.1 (Operador autoadjunto) *Sea V un espacio vectorial con producto interno y T un operador lineal en V. Se dice que T es **autoadjunto** $\Leftrightarrow T = T^*$.*

Proposición 4.2 *Sea V un espacio vectorial con producto interno y T un operador lineal en V. Entonces*

$$T \text{ es autoadjunto } \Leftrightarrow \big\langle T(v), w \big\rangle = \big\langle v, T(w) \big\rangle \quad \forall v, w \in V.$$

<u>Demostración:</u> Ejercicio.

---

5. Reprensentación matricial de operadores autoadjuntos. Matrices simétricas y hermíticas.

Ahora veamos como es la representación matricial de los operadores autoadjuntos en bases ortonormales. Estudiaremos por separado el caso real ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) y el caso complejo ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Recordemos que una matriz A <u>real o compleja</u> es simétrica cuando $A = A^t$.

Teorema 5.1 *Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y T un operador en V. Son equivalentes:*
(a) T es autoadjunto.
(b) Para toda base <u>ortonormal</u> $\mathcal{B}$ de V se cumple que $_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ es simétrica (real).
(c) Existe una base <u>ortonormal</u> $\mathcal{B}_0$ de V para la cual $_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}$ es simétrica (real).

<u>Demostración:</u>
(a)$\Rightarrow$(b) Por ser T autoadjunta

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{B}} \tag{16}$$

Por la Proposición 3.2 (notar que por ser $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la matriz asociada es real):

$$_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{B}} = \overline{_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}}^{\,t} = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}^t \tag{17}$$

De (16) y (17)

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}^{t}$$

esto es ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ es simétrica.

(b)$\Rightarrow$(c) Es trivial.

(c)$\Rightarrow$(a) Como ${}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}$ es simétrica

$${}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}^{t} = {}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}$$

y por la Proposición 3.2

$${}_{\mathcal{B}_0}(T^*)_{\mathcal{B}_0} = \overline{{}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}}^{\,t} = {}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}^{t}$$

así

$${}_{\mathcal{B}_0}(T^*)_{\mathcal{B}_0} = {}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}$$

Esto prueba que $T^* = T$.

$\square$

Recordemos que una matriz A es hermítica $\Leftrightarrow A = \overline{A}^t$ (recordar que la matriz conjugada se obtiene conjugando cada una de sus entradas).

Teorema 5.2 *Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y T un operador en V. Son equivalentes:*
(a) T es autoadjunto.
(b) Para toda base ortonormal $\mathcal{B}$ de V se cumple que ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ es hermítica.
(c) Existe una base ortonormal $\mathcal{B}_0$ de V para la cual ${}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}$ es hermítica.

Demostración: ejercicio (seguir las mismas ideas de la demostración del Teorema anterior).

---

6. Teoría Espectral de operadores autoadjuntos.

Recordemos que en dimensión finita los valores propios de un operador lineal son las raíces de su polinomio característico que pertenecen al cuerpo $\mathbb{K}$.

Caso complejo: Por el "Teorema Fundamental del Álgebra", cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ todas las raíces del polinomio característico son valores propios de T. En otras palabras, *cuando la dimensión del espacio vectorial es finita y el cuerpo es $\mathbb{C}$ está garantizada la existencia de valores propios de cualquier operador (sea autoadjunto o no).*

Caso real: La situación es diferente cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. En este caso existen operadores lineales sin valores propios (las raíces del polinomio característico son complejas no reales). Verifique el lector que el operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0) = (0,1)$ y $T(0,1) = (-1,0)$ no tiene valores propios. Otro ejemplo está dado por la rotación en $\mathbb{R}^2$ de centro el origen y ángulo $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Por tal motivo haremos nuevamente distinción entre el caso complejo y el caso real.

Teorema 6.1 *Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ y T un operador autoadjunto en V. Si λ es un valor propio de T entonces λ es real.*

Demostración: Si λ es un valor propio de T entonces existe $v \in V$, $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$. Luego

$$\langle v, T(v) \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle v, v \rangle$$

y

$$\langle T(v), v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$$

Pero como T es autoadjunto se cumple que $\langle v, T(v) \rangle = \langle T(v), v \rangle$ y por consiguiente

$$\overline{\lambda} \langle v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$$

y siendo $\langle v, v \rangle \neq 0$ se tiene que $\overline{\lambda} = \lambda$. $\square$

Corolario 6.2 *Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre el cuerpo $\mathbb{C}$. Si la dimensión de V es finita y T es un operador autoadjunto en V entonces todas las raíces del polinomio característico de T son reales.*

Demostración: En dimensión finita, cuando el cuerpo es $\mathbb{C}$, las raíces del polinomio característico de T coinciden con los valores propios de T. $\square$

Teorema 6.3 *Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Si la dimensión de V es finita y T es un operador autoadjunto en V entonces todas las raíces del polinomio característico de T son reales (y por consiguiente todas son valores propios de T).*

Demostración: Sea $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V. Luego como T es autoadjunto la matriz $A = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ es simétrica. Además, como el cuerpo es $\mathbb{R}$, la matriz A es real. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ con el producto interno usual. Sea $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^n$; recordar que la base canónica es una base ortonormal respecto al producto interno usual. Definimos la transformación lineal $\widetilde{T} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tal que

$${}_{\mathcal{C}}(\widetilde{T})_{\mathcal{C}} = A$$

Como la matriz ${}_{\mathcal{C}}(\widetilde{T})_{\mathcal{C}} = A$ es hermítica (pues por ser A simétrica real se cumple que $\bar{A}^t = A^t = A$) y $\mathcal{C}$ es una base ortonormal, por el Teorema 5.1, se tiene que $\widetilde{T}$ autoadjunta (sobre $\mathbb{C}$). Luego, por el Corolario 6.2, se concluye que todas las raíces del polinomio característico de $\widetilde{T}$ son reales.

Pero como $\chi_{\widetilde{T}} = \chi_A = \chi_T$, se concluye que todas las raíces del polinomio característico de T son reales. $\square$

Corolario 6.4 *(a) Sea $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n \times n}$. Si A es simétrica entonces todas las raíces del polinomio característico de A son reales.*
(b) Sea $A \in \mathcal{M}(\mathbb{C})_{n \times n}$. Si A es hermítica entonces todas las raíces del polinomio característico de A son reales.

Demostración: Basta con considerar un operador lineal T que en una base ortonormal tenga a A como matriz asociada y aplicar el Teorema 6.3 y el Corolario 6.2, respectivamente. $\square$

El Teorema 6.3 y el Corolario 6.2 nos garantizan, en dimensión finita, que todo operador autoadjunto tiene valores propios. Sin embargo, aunque el cuerpo sea $\mathbb{C}$, este resultado puede ser falso en dimensión infinita. Veamos pues un ejemplo de un operador autoadjunto en un espacio de dimensión infinita que no tiene valores propios.

Ejemplo 6 *En el espacio vectorial* $\mathsf{C}\big([a,b]\,,\mathbb{C}\big)$ [4] *sobre el cuerpo* $\mathbb{C}$ *con el producto interno.*

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f\left(x\right)\overline{g(x)}dx \qquad \forall f,g\in \mathsf{C}\big([a,b]\,,\mathbb{C}\big)$$

consideremos la transformación lineal "multiplicación por $x\in[a,b]$*", definida por:*

$$T:\mathsf{C}\big([a,b]\,,\mathbb{C}\big)\rightarrow \mathsf{C}\left([a,b]\,,\mathbb{C}\right) \qquad \text{tal que } T\left(f\right)\left(x\right)=xf\left(x\right)$$

Verificar que la transformación T *es lineal. Como*

$$\langle T\left(f\right),g\rangle = \int_a^b xf\left(x\right)\overline{g(x)}dx = \int_a^b f\left(x\right)\overline{xg(x)}dx = \langle f,T\left(g\right)\rangle \qquad \forall f,g\in \mathsf{C}\big([a,b]\,,\mathbb{C}\big)$$

resulta que T *es autoadjunta. Sin embargo* T *no puede tener valores propios. En efecto si* $\lambda_0\in\mathbb{R}$ *es un valor propio de* T*, existe* $f_0\neq\overrightarrow{0}$ *tal que*

$$T\left(f_0\right)=\lambda_0 f_0$$

es decir que

$$xf_0\left(x\right)=\lambda_0 f_0\left(x\right) \qquad \forall x\in[a,b]$$

de donde

$$\left(x-\lambda_0\right)f_0\left(x\right)=0 \qquad \forall x\in[a,b]$$

y por lo tanto

$$f_0\left(x\right)=0 \qquad \forall x\in[a,b]\,,\,x\neq\lambda_0$$

Finalmente, por la continuidad se deduce que

$$f_0=\overrightarrow{0}$$

Proposición 6.5 *Sea* V *un espacio vectorial con producto interno sobre un cuerpo* $\mathbb{K}$ *y* T *es un operador autoadjunto en* V*.*

Si λ_1 *y* λ_2 *son valores propios* *<u>distintos</u>* *de* T *entonces los subespacios propios* S_{λ_1} *y* S_{λ_2} *son ortogonales, esto es* $\langle v,w\rangle=0\ \ \forall v\in S_{\lambda_1},\,\forall w\in S_{\lambda_2}$*.*

<u>Demostración</u>: Sean $v\in S_{\lambda_1}$ y $w\in S_{\lambda_2}$. Luego

$$\langle T(v),w\rangle=\langle\lambda_1 v,w\rangle=\lambda_1\left\langle v,w\right\rangle$$

y

$$\langle v,T\left(w\right)\rangle=\langle v,\lambda_2 w\rangle=\overline{\lambda_2}\left\langle v,w\right\rangle=\lambda_2\left\langle v,w\right\rangle \qquad \text{(pues } \lambda_2\in\mathbb{R}\text{, por ser } T \text{ autoadjunto)}$$

Pero como T es autoadjunto se cumple que $\langle v,T\left(v\right)\rangle=\langle T\left(v\right),v\rangle$ y por consiguiente

$$\lambda_1\left\langle v,w\right\rangle=\lambda_2\left\langle v,w\right\rangle\Leftrightarrow\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\left\langle v,w\right\rangle=0$$

y siendo $\lambda_1\neq\lambda_2$ se tiene que $\langle v,w\rangle=0$. □

[4] Recordamos que $\mathsf{C}\big([a,b]\,,\mathbb{C}\big)$ es el conjunto de las funciones continuas $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{C}$

Lema 6.6 *Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, S un subespacio vectorial de V y T un operador en V.*

Si T es autoadjunto y S es invariante bajo T entonces $S^{\perp}$ es invariante bajo T.

Demostración: práctico.

Teorema 6.7 (Teorema Espectral para operadores autoadjuntos) *Sea V un espacio vectorial, real o complejo, de dimensión finita.*

Si T es un operador autoadjunto en V entonces existe una base ortonormal de V formada por vectores propios de T, es decir T es diagonalizable.

Demostración: Siendo T autoadjunta, vimos que las raíces de su polinomio característico son reales. Entonces T tiene por lo menos un valor propio $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ (tanto sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), y por lo tanto existe $v_0 \neq \vec{0}$, $v_0 \in S_{\lambda_0}$ (subespacio propio asociado a λ_0). Consideremos el vector $w_0 = \dfrac{v_0}{\|v_0\|} \in S_{\lambda_0}$.
Continuamos la prueba por inducción completa en $n = \dim V$.
Paso base: Si $n = 1$ se cumple la tesis, pues $B = \{w_0\}$ es la base ortonormal buscada.
Paso inductivo: Suponemos el resultado cierto para todo espacio vectorial de dimensión menor o igual a $n-1$ y debemos probar que se cumple cuando la dimensión es n.
Consideremos el subespacio $S = [w_0]$.
Como w_0 es un vector propio de T se tiene que el subespacio S es invariante bajo T y por el Lema 6.6 $S^{\perp}$ es invariante bajo T.
Luego como T es autoadjunto y $S^{\perp}$ es invariante bajo T se tiene que $T|_{S^{\perp}} : S^{\perp} \to S^{\perp}$ es autoadjunto (pues al ser autoadjunto en todo V su restricción a un subespacio invariante también verificará la definición de autoadjunto).

Entonces como $\dim S^{\perp} = \dim V - \dim S = n-1$ y $T|_{S^{\perp}}$ es autoadjunto, por la hipótesis inductiva, existe una base ortonormal $\{w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}\}$ de $S^{\perp}$ formada por vectores propios de $T|_{S^{\perp}}$(es decir, vectores propios de T en $S^{\perp}$).
Por último, siendo $V = S \oplus S^{\perp}$, $\{w_0\}$ base ortonormal de S y $\{w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}\}$ base ortonormal de $S^{\perp}$, ambas formadas por vectores propios de T resulta que $\{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ es una base ortonormal de V formada por vectores propios de T.

$\square$

Teorema 6.8 *Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y T un operador en V. Si existe una base ortonormal del espacio formada por vectores propios de T y las raíces de χ_T son reales entonces T es autoadjunto.*

Demostración: Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal de V formada por vectores propios de T, es decir que $T(v_i) = \lambda_i v_i$ con $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (pues las raíces de χ_T son reales).

Luego ${}_B(T)_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. Como ${}_B(T)_B$ es simétrica (hermítica) y B es ortonormal se concluye que T es autoadjunta.

□

Teorema 6.9 (Teorema Espectral para matrices simétricas y hermíticas)
(a) Si $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times n}$ es una matriz simétrica, entonces existe $P \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times n}$ invertible con $P^{-1} = P^t$ tal que $D = P^{-1}AP$ es una matriz diagonal.

(b) Si $A \in \mathcal{M}(\mathbb{C})_{n\times n}$ es una matriz hermítica, entonces existe $P \in \mathcal{M}(\mathbb{C})_{n\times n}$ invertible con $P^{-1} = \overline{P}^t$ tal que $D = P^{-1}AP$ es una matriz diagonal.

Observación 6.10 *Cuando una matriz invertible $P \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times n}$ cumple la condición $P^{-1} = P^t$ se dice que la matriz real P es ortogonal y cuando $P \in \mathcal{M}(\mathbb{C})_{n\times n}$ cumple la condición $P^{-1} = \overline{P}^t$ se dice que la matriz compleja P es unitaria . Posteriormente, en la sección 9, pág. 20, serán estudiadas estos tipos de matrices.*

Demostración: (a) Consideramos en $\mathbb{R}^n$ el producto interno habitual y $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Definimos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}} = A$$

Por ser A simétrica y $\mathcal{C}$ una base ortonormal (respecto al producto interno usual), por el Teorema 5.1, se tiene que T es autoadjunta. Entonces por el Teorema Espectral (Teorema 6.7), existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ en la cual T se diagonaliza, es decir que $_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = D$ con D diagonal.
Por el Teorema de cambio de base se tiene que

$$_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}} = {_{\mathcal{C}}(Id)_{\mathcal{B}}}\,{_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}}\,{_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{C}}}.$$

Siendo $P = {_{\mathcal{C}}(Id)_{\mathcal{B}}}$ se tiene que

$$A = P\,D\,P^{-1}$$

Solo resta probar que la matriz P es ortogonal (esto es $P^{-1} = P^t$).
Como veremos más adelante, cuando estudiemos las matrices ortogonales, si las columnas de P forman una base ortonormal respecto al producto interno usual de $\mathbb{R}^n$ se tiene que P es ortogonal (ver Proposición 9.3 pag. 21).
Como en este caso $P = {_{\mathcal{C}}(Id)_B}$ se deduce que las columnas de P son los vectores de la base ortonormal B.

(b) Se deja como ejercicio. □

Observación 6.11 *El teorema anterior afirma que toda matriz simétrica real es diagonalizable y toda matriz hermítica es diagonalizable.*

---

7. Isometrías lineales

El objetivo de esta sección es estudiar a las transformaciones lineales que preservan el producto interno de vectores.

Proposición 7.1 *Sean V y W espacios vectoriales con producto interno sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y $T : V \to W$ una transformación lineal. Son equivalentes:*
(a) T preserva el producto interno, esto es:

$$\left\langle T(v_1), T(v_2)\right\rangle_W = \langle v_1, v_2\rangle_V \qquad \forall\, v_1, v_2 \in V. \tag{18}$$

(b) T preserva la norma, esto es:

$$\|T(v)\|_W = \|v\|_V \qquad \forall\, v \in V$$

Demostración:
(a) $\Rightarrow$ (b) Como T preserva el producto interno se tiene que:

$$\|T(v)\|_W^2 = \left\langle T(v), T(v)\right\rangle_W = \langle v, v\rangle_V = \|v\|_V^2 \qquad \forall\, v \in V$$

(b) $\Rightarrow$ (a) Como T preserva la norma se tiene que

$$\|v\|_V^2 = \|T(v)\|_W^2$$

esto es

$$\langle v, v\rangle_V = \left\langle T(v), T(v)\right\rangle_W \qquad \forall\, v \in V \tag{19}$$

Veamos que también se cumple (18). En efecto, utilizando las propiedades del producto interno se tiene que[5]:

$$\begin{aligned}
\langle v_1+v_2, v_1+v_2\rangle_V &= \|v_1\|_V^2 + \langle v_1, v_2\rangle_V + \langle v_2, v_1\rangle_V + \|v_2\|_V^2 \\
&= \|v_1\|_V^2 + \langle v_1, v_2\rangle_V + \overline{\langle v_1, v_2\rangle_V} + \|v_2\|_V^2 \\
&= \|v_1\|_V^2 + 2\,Re\big(\langle v_1, v_2\rangle_V\big) + \|v_2\|_V^2 \qquad \forall\, v_1, v_2 \in V
\end{aligned} \tag{20}$$

De la misma manera, utilizando la linealidad de T, se tiene

$$\left\langle T(v_1+v_2), T(v_1+v_2)\right\rangle_W = \|T(v_1)\|_W^2 + 2\,Re\big(\langle T(v_1), T(v_2)\rangle_V\big) + \|T(v_2)\|_W^2 \tag{21}$$

Utilizando (19), de (20) y (21), se tiene que

$$\|v_1\|_V^2 + 2\,Re\big(\langle v_1, v_2\rangle_V\big) + \|v_2\|_V^2 = \|T(v_1)\|_W^2 + 2\,Re\big(\langle T(v_1), T(v_2)\rangle_V\big) + \|T(v_2)\|_W^2$$

y como T preserva la norma:

$$Re\big(\langle v_1, v_2\rangle_V\big) = Re\big(\langle T(v_1), T(v_2)\rangle_W\big) \qquad \forall\, v_1, v_2 \in V \tag{22}$$

Terminaremos la demostración separando el caso real y el complejo.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ es inmediato, a partir de (22), que

$$\langle v_1, v_2\rangle_V = \left\langle T(v_1), T(v_2)\right\rangle_W \qquad \forall\, v_1, v_2 \in V$$

[5] Recordar que si z es un complejo se cumple que $z + \overline{z} = 2Re(z)$.

y la prueba ha concluido.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ falta ver que las partes imaginarias también son iguales, a partir de (22) se deduce que[6]

$$\begin{aligned} Im\big(\langle v_1, v_2\rangle_V\big) &= -Re\big(i\,\langle v_1, v_2\rangle_V\big) = -Re\big(\langle iv_1, v_2\rangle_V\big) = \\ &= -Re\big(\langle T\,(iv_1)\,, T\,(v_2)\rangle_W\big) = -Re\big(\langle iT\,(v_1)\,, T\,(v_2)\rangle_W\big) \\ &= -Re\big(i\,\langle T\,(v_1)\,, T\,(v_2)\rangle_W\big) = Im\,(\langle T\,(v_1)\,, T\,(v_2)\rangle_W) \end{aligned} \tag{23}$$

De (22) y (23) se obtiene (18). □

Definición 7.2 *Sean V y W espacios vectoriales con producto interno sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y $T : V \to W$ una transformación lineal.*
*Diremos que T es una **isometría lineal** $\Leftrightarrow T$ preserva el producto interno.*

Observación 7.3 *Si consideramos a los espacios con productos internos V y W como espacios métricos, cuyas métricas están inducidas por las respectivas normas:*

$$d_V\,(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\|_V \qquad y \qquad d_W\,(w_1, w_2) = \|w_1 - w_2\|_W$$

se tiene que las transformaciones lineales que preservan el producto interno también preservan la distancia (o métrica)

$$d_W\big(T\,(v_1)\,, T\,(v_2)\big) = \|T\,(v_1) - T\,(v_2)\|_W = \|T\,(v_1 - v_2)\|_W = \|v_1 - v_2\|_V = d_V\,(v_1, v_2)$$

y por esta razón se le llaman isometrías lineales.

Observación 7.4 *Al comienzo de la definición 7.2 se dice que $T : V \to W$ es una transformación lineal. Esto no es necesario, pues las transformaciones que preservan el producto interno son lineales (ver práctico). En realidad son equivalentes:*

(a) T preserva el producto interno.
(b) T es lineal y conserva el producto interno.
(c) T es lineal y conserva la norma.

Proposición 7.5 *Sean V y W espacios vectoriales con producto interno sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Si $T : V \to W$ es una isometría lineal $\Rightarrow T$ es inyectiva.*

Demostración:
Si $v \in N\,(T) \Rightarrow T\,(v) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \|T\,(v)\| = 0$. Pero como T preserva la norma $\|T\,(v)\| = \|v\| = 0 \Rightarrow v = \overrightarrow{0}$. Esto prueba que $N\,(T) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ y por lo tanto T es inyectiva. □

Ejemplo 7 *Consideremos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ con los productos internos usuales. La transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T\,(x, y) = (x, y, 0)$ es una isometría lineal pues*

$$\|T\,(x, y)\|_{\mathbb{R}^3} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|_{\mathbb{R}^2}$$

Por lo tanto T es inyectiva. Sin embargo T no es sobreyectiva (por ejemplo $(0, 0, 1) \notin Im(T)$).

[6]Recordar también que $Im\,(z) = -Re\,(iz)$

Proposición 7.6 *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita con producto interno sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y $T : V \to W$ una isometría lineal. Entonces*

$$T \text{ es sobreyectiva} \Leftrightarrow \dim V = \dim W$$

Demostración:
($\Rightarrow$) Sabemos que T es sobreyectiva. Pero por ser T una isometría, de acuerdo con la Proposición 7.5, también es inyectiva. Es decir que $T : V \to W$ es un isomorfismo entre V y W, y por consiguiente $\dim V = \dim W$
($\Leftarrow$) Como T es inyectiva (por ser isometría) y $\dim V = \dim W$ se tiene que T es sobreyectiva. $\square$

Corolario 7.7 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces toda isometría lineal $T : V \to V$ es sobreyectiva, y por lo tanto es un isomorfismo.*

El resultado del Corolario anterior puede ser falso si la dimensión no es finita, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8 *Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{P}$ de los polinomios reales. Dados los polinomios p y q (si p y q son de distinto grado, se le añaden coeficientes nulos al de menor grado hasta igualar el grado del mayor) tales que*

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad y \qquad q(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$$

se define el producto interno

$$\langle p, q \rangle = a_n b_n + \cdots + a_1 b_1 + a_0 b_0$$

y la transformación lineal "multiplicación por x" como:

$$T : \mathcal{P} \to \mathcal{P} \quad \text{tal que } T(p)(x) = xp(x)$$

Verificar que $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno y que T es lineal.

Como para todo $p : p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ se cumple que

$$\|p\| = \|T(p)\| = \sqrt{a_n^2 + \cdots + a_1^2 + a_0^2}$$

se tiene que T es una isometría lineal, pero T no es sobreyectiva (por ejemplo el polinomio constante $p_1 : p_1(x) = 1$ no está en $Im(T)$.)

Proposición 7.8 *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita con producto interno sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y $T : V \to W$ una transformación lineal. Son equivalentes:*
(a) T es isometría lineal sobreyectiva.
(b) T lleva bases ortonormales de V en bases ortonormales de W (esto es para toda $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de V se tiene que $T(\mathcal{B}) = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ es base una ortonormal de W).
(c) T lleva una base ortonormal de V en una base ortonormal de W (esto es existe $\mathcal{B}_0 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de V tal que $T(\mathcal{B}_0) = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ es base ortonormal de W).

Demostración:
(a) $\Rightarrow$ (b) Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal de V.
Recordemos que todas las isometrías lineales son inyectivas (Proposición 7.5). Como además T es sobreyectiva se tiene que T es un isomorfismo, y por consiguiente $T(\mathcal{B}) = \{T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n)\}$ es una base de W.
Además, como T preserva el producto interno, se cumple que

$$\left\langle T(e_i), T(e_j)\right\rangle_W = \langle e_i, e_j\rangle_V = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Por lo tanto $T(\mathcal{B})$ es una base ortonormal de W.
(b) $\Rightarrow$ (c) Inmediato.
(c) $\Rightarrow$ (a) Como existe $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ base ortonormal de V para la cual es una base ortonormal $T(\mathcal{B}_0) = \{T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n)\}$ de W, se tiene que

$$\left\langle T(e_i), T(e_j)\right\rangle_W = \langle e_i, e_j\rangle_V = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

es decir que T preserva el producto interno en una base de V, y por lo tanto T preserva el producto interno en V. Es decir que T es una isometría lineal. Por otra parte, como T transforma una base de V en una base de W sabemos que T es un isomorfismo y por lo tanto T es sobreyectiva. $\square$

---

8. Operadores ortogonales y unitarios

Hay una analogía entre la conjugación de los números complejos y el adjunto de un operador. Por ejemplo, sabemos que si $z = \overline{z}$ entonces $z \in \mathbb{R}$ y de las secciones anteriores sabemos que cuando $T = T^*$ entonces los valores propios de T son reales. Por otro lado, si $z = -\overline{z}$ entonces z es imaginario puro y si un operador cumple que $T = -T^*$ entonces los valores propios de T son imaginarios puros (ver práctico).

En la conjugación compleja tenemos la siguiente propiedad: si $z^{-1} = \overline{z}$ entonces $|z| = 1$,¿para los operadores lineales que cumplen que $T^{-1} = T^*$ será válido que los valores propios de T tiene módulo 1?, ¿existe un Teorema Espectral para tales operadores?

Busquemos respuestas a estas interrogantes.

Proposición 8.1 *Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y T un operador lineal en V.*
Entonces T es invertible y $T^{-1} = T^* \Leftrightarrow T$ es una isometría lineal sobreyectiva.

Demostración:
($\Rightarrow$) Como T es invertible (y por lo tanto T es sobreyectivo) con $T^{-1} = T^*$ se cumple que $T^* \circ T = I$, luego

$$\langle v, w\rangle = \left\langle T^*\big(T(v)\big), w\right\rangle = \left\langle T(v), T(w)\right\rangle$$

es decir que T es una isometría lineal.
($\Leftarrow$) Recordar que las isometrías son inyectivas. Como además T es sobreyectiva se tiene que T es invertible. Luego

$$\langle T(v), w\rangle = \left\langle T(v), T\left(T^{-1}(w)\right)\right\rangle \qquad \forall v, w \in V$$

y por ser T una isometría lineal

$$\left\langle T(v), T\left(T^{-1}(w)\right)\right\rangle = \left\langle v, T^{-1}(w)\right\rangle \qquad \forall v, w \in V$$

De donde

$$\langle T(v), w\rangle = \left\langle v, T^{-1}(w)\right\rangle \qquad \forall v, w \in V$$

Por lo tanto existe T^* y coincide con T^{-1}.

$\square$

Definición 8.2 *Consideremos en un espacio vectorial V con producto interno sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ un operador lineal T invertible tal que*

$$T^{-1} = T^*$$

(a) Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ diremos que T es ***ortogonal.***
(b) Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ diremos que T es ***unitario****.*

Observación 8.3 *Es importante recordar las propiedades de las isometrías lineales estudiadas en la sección 7.*

---

9. Representación matricial. Matrices ortogonales y unitarias

Definición 9.1 (Matrices ortogonales y unitarias)
(a) Sea $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times n}$, diremos que A es ***ortogonal*** *cuando es invertible y $A^{-1} = A^t$.*
(b) Sea $A \in \mathcal{M}(\mathbb{C})_{n\times n}$, diremos que A es ***unitaria*** *cuando es invertible y $A^{-1} = \overline{A}^t$.*

Dadas dos matrices (reales o complejas) A y B, indicaremos con $A_{(i)}$ a la i-ésima fila de A y por $B^{(j)}$ a la j-ésima columna de B. Además $(AB)_{ij}$ y $\left(A\overline{B}\right)_{ij}$ representarán a los elementos ij (es decir de la fila i y columna j) de las matrices AB y $A\overline{B}$ respectivamente.

Lema 9.2 *(a) Si A y $B \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times n}$ entonces $(AB)_{ij} = \left\langle A_{(i)}, B^{(j)}\right\rangle$, donde $\langle\, ,\rangle$ el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$.*
(b) Si A y $B \in \mathcal{M}(\mathbb{C})_{n\times n}$, entonces $\left(A\overline{B}\right)_{ij} = \left\langle A_{(i)}, B^{(j)}\right\rangle$, donde $\langle\, ,\rangle$ el producto interno usual en $\mathbb{C}^n$.

Demostración:
(a) En efecto, si $A_{(i)} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ y $B^{(j)} = (b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}) \in \mathbb{R}^n$ resulta de la definición del producto interno habitual en $\mathbb{R}^n$ que

$$\left\langle A_{(i)}, B^{(j)}\right\rangle = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\, b_{kj}$$

Por otro lado, por la definición de producto de matrices

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\, b_{kj}$$

Igualando se obtiene la tesis.
(b) Ejercicio.

$\square$

Proposición 9.3 *(a) Sea $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times n}$. Entonces la matriz A es ortogonal si y sólo si sus columnas $\{A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\}$ forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ (considerado con el producto interno usual).*
(b) Sea $A \in \mathcal{M}(\mathbb{C})_{n\times n}$. Entonces la matriz A es unitaria si y sólo si sus columnas $\{A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\}$ son una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ (considerado con el producto interno usual).

Demostración:
(a) La matriz A es ortogonal $\Leftrightarrow$ A es invertible y $A^{-1} = A^t$. Entonces $A^tA = I$ de donde vemos que $\left(A^tA\right)_{ij} = (I)_{ij}$. Entonces

$$\left(A^tA\right)_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

Usando el Lema 9.2 se tiene que lo anterior se cumple si y sólo sí

$$\left\langle A^t_{(i)}, A^{(j)} \right\rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

Como $A^t_{(i)} = A^{(i)}$, resulta que

$$\left\langle A^{(i)}, A^{(j)} \right\rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

es decir que $\{A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\}$ es un conjunto ortonormal de $\mathbb{R}^n$.
(b) Ejercicio.

$\square$

La proposición siguiente relaciona el concepto de operador ortogonal y de matriz ortogonal.

Proposición 9.4 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V y T un operador lineal en V.*
Entonces T es ortogonal $\Leftrightarrow$ ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ es una matriz ortogonal.

Demostración: Indiquemos por $A^{(j)}$ a la columna j de ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$. Como $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal para cualquier $v \in V$ se tiene que:

$$v = \langle v, v_1\rangle v_1 + \cdots + \langle v, v_n\rangle v_n$$

En particular se tiene:

$$T(v_j) = \langle T(v_j), v_1\rangle v_1 + \cdots + \langle T(v_j), v_n\rangle v_n \;\; \forall\, j = 1, \dots, n$$

De donde se deduce que la j-ésima columna de ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{B}}$ es

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} \langle T(v_j), v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle T(v_j), v_n \rangle \end{pmatrix}$$

Por otro lado se tiene que:

$$\begin{aligned}\langle T(v_i), T(v_j) \rangle &= \langle \langle T(v_i), v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle T(v_i), v_n \rangle v_n,\ \langle T(v_j), v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle T(v_j), v_n \rangle v_n \rangle \\ &\quad \text{(observar que } \mathcal{B} \text{ es ortonormal y el espacio es real)} \\ &= \langle T(v_i), v_1 \rangle \langle T(v_j), v_1 \rangle + \cdots + \langle T(v_i), v_n \rangle \langle T(v_j), v_n \rangle \\ &= \left\langle A^{(i)}, A^{(j)} \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \qquad \text{(producto interno usual en } \mathbb{R}^n\text{)}\end{aligned}$$

Entonces, usando propiedades vistas antes:

$$T \text{ ortogonal} \Leftrightarrow T(\mathcal{B}) \text{ es una base ortonormal de } V \Leftrightarrow \langle T(v_i), T(v_j) \rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ las columnas de ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ es una matriz ortogonal.

□

Proposición 9.5 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V y T un operador lineal en V.*
T es unitaria $\Leftrightarrow$ ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ es una matriz unitaria.

Demostración: Queda como ejercicio.

---

10. Teoría Espectral de operadores unitarios

Al igual que para operadores autoadjuntos, diferenciaremos el caso complejo del caso real.

Teorema 10.1 *Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ y T un operador unitario en V.*
(a) Si λ es un valor propio de T entonces $|\lambda| = 1$.
(b) Si $\dim V$ es finita entonces todas las raíces del polinomio característico de T tienen módulo 1.

Demostración:
(a) Si λ es un valor propio de T entonces existe $v \neq \vec{0}$ tal que $T(v) = \lambda v$. Como T es unitario en V, T conserva la norma, por lo tanto

$$\|v\| = \|T(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$$

como $\|v\| \neq 0$, se tiene que $|\lambda| = 1$.
(b) En dimensión finita, cuando el cuerpo es $\mathbb{C}$, las raíces del polinomio característico de T coinciden con los valores propios de T, los cuales, según el resultado anterior, son complejos de módulo 1.

□

Proposición 10.2 *Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y T un operador ortogonal en V.*
(a) Si λ es un valor propio de T entonces $\lambda = \pm 1$.
(b) Si $\dim(V)$ es finita entonces todas las raíces del polinomio característico de T tienen módulo 1.

<u>Demostración:</u>

(a) Se procede como en la parte (a) de la Proposición anterior y se tiene que $|\lambda| = 1$. Como $\lambda \in \mathbb{R}$ se deduce que $\lambda = \pm 1$.

(b) Sea $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V. Como T es ortogonal la matriz $A = _{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ es ortogonal. Consideremos en el espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ con producto interno usual la transformación lineal $\widetilde{T} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tal que $_{\mathcal{C}}(\widetilde{T})_{\mathcal{C}} = A$, donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^n$. Como la matriz $_{\mathcal{C}}(\widetilde{T})_{\mathcal{C}}$ es unitaria (pues, por ser A ortogonal real, se cumple que $\bar{A}^t = A^t = A^{-1}$) y $\mathcal{C}$ es una base ortonormal se tiene que $\widetilde{T}$ unitaria (sobre $\mathbb{C}$). Luego, por la parte anterior, se concluye que todas las raíces del polinomio característico de $\widetilde{T}$ tienen módulo 1. Pero como $\chi_{\widetilde{T}} = \chi_A = \chi_T$, se concluye que todas las raíces del polinomio característico de T tienen módulo 1.

$\square$

Corolario 10.3 *(a) Sea $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n\times n}$. Si A es ortogonal entonces todas las raíces del polinomio característico de A tienen módulo 1.*
(b) Sea $A \in \mathcal{M}(\mathbb{C})_{n\times n}$. Si A es unitaria entonces todas las raíces del polinomio característico de A tienen módulo 1.

<u>Demostración</u>: Ejercicio (considerar un operador lineal T que en una base ortonormal tenga a A como matriz asociada y aplicar los resultados anteriores). $\square$

Proposición 10.4 *Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ y T un operador unitario en V.*

Si λ_1 y λ_2 son valores propios <u>distintos</u> de T entonces los subespacios propios S_{λ_1} y S_{λ_2} son ortogonales.

<u>Demostración</u>: Sean $v \in S_{\lambda_1}$ y $w \in S_{\lambda_2}$. Por ser T unitario se tiene que

$$\langle v, w\rangle = \langle T(v), T(w)\rangle = \langle \lambda_1 v, \lambda_2 w\rangle = \lambda_1\overline{\lambda_2}\,\langle v, w\rangle$$

De donde

$$\lambda_1\overline{\lambda_2}\,\langle v, w\rangle = \langle v, w\rangle$$

y por lo tanto

$$\left(1 - \lambda_1\overline{\lambda_2}\right)\langle v, w\rangle = 0 \tag{24}$$

Como $|\lambda_2| = 1$ (por ser valor propio de un operador unitario), se tiene que

$$1 - \lambda_1\overline{\lambda_2} = (\lambda_2 - \lambda_1)\,\overline{\lambda_2}$$

y siendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se deduce de (24) que $\langle v, w\rangle = 0$. $\square$

Proposición 10.5 *Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y T un operador ortogonal en V.*

Si λ_1 y λ_2 son valores propios distintos de T entonces los subespacios propios S_{λ_1} y S_{λ_2} son ortogonales.

Demostración: ejercicio. □

Ejemplo 9 ***(Un operador ortogonal no diagonalizable)*** *Consideremos, en $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual, el operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que*

$$_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Como las columnas de $_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}}$ forman un conjunto ortonormal, por la Proposición 9.3, se tiene que $_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}}$ es una matriz ortogonal. Y siendo $\mathcal{C}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, por la Proposición 9.4, se tiene que T es un operador ortogonal. Es inmediato que $\chi_T(\lambda) = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 + 1\right)$ y por lo tanto el único valor propio de T es $\lambda = 1$. Por lo tanto T no es diagonalizable (el único subespacio propio tiene dimensión 1, siendo imposible obtener una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios).

Sin embargo, para operadores unitarios (en espacios vectoriales complejos) tenemos un Teorema Espectral. Veamos un resultado previo:

Lema 10.6 *Si T es unitario y S es invariante bajo T entonces $S^{\perp}$ es invariante bajo T.*

Demostración:

Por un lado tenemos que $T(S) \subseteq S$ (pues S es invariante bajo T) y por otro lado, siendo T invertible se tiene que $\dim(S) = \dim T(S)$ (pues $T|_S$ es un isomorfismo lineal entre S y su imagen $T(S)$). Por lo tanto $T(S) = S$. Así para todo $s \in S$ existe $s' \in S$ tal que $s = T(s')$.

Tomemos ahora un vector $w \in S^{\perp}$. Luego para todo $s \in S$ se tiene que

$$\langle T(w), s\rangle = \left\langle T(w), T(s')\right\rangle = \left\langle w, s'\right\rangle = 0$$

Entonces $T(w) \in S^{\perp}$. Por lo tanto $S^{\perp}$ es invariante bajo T.

□

Teorema 10.7 (Teorema Espectral para operadores unitarios) *Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{C}$.*

Si T es un operador unitario en V entonces existe una base ortonormal de V formada por vectores propios de T, es decir T es diagonalizable.

Demostración: Como V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, el operador T tiene por lo menos un valor propio λ_0, y por lo tanto existe un vector no nulo $v_0 \in S_{\lambda_0}$ (subespacio propio asociado a λ_0). Consideremos el vector $w_0 = \dfrac{v_0}{\|v_0\|} \in S_{\lambda_0}$.

Continuamos la prueba por inducción completa en $n = \dim V$.

Paso base: Si $n = 1$ se cumple la tesis pues $B = \{w_0\}$ es la base ortonormal buscada.
Paso inductivo: Suponemos el resultado cierto para todo espacio vectorial de dimensión menor o igual a $n - 1$ y debemos probar que se cumple cuando la dimensión es n.
Consideremos el subespacio $S = [w_0]$. Como w_0 es un vector propio de T se tiene que el subespacio S es invariante bajo T y por el Lema 10.6 resulta que $S^\perp$ es invariante bajo T.
Luego como T es unitario y $S^\perp$ es invariante bajo T se tiene que $T|_{S^\perp} : S^\perp \to S^\perp$ es unitario (pues al ser unitario en todo V su restricción a un subespacio invariante también verificará la definición de ser unitario).
Entonces como $\dim S^\perp = \dim V - dimS = n - 1$ y $T|_{S^\perp}$ es unitario, por la hipótesis inductiva, existe una base ortonormal $\{w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}\}$ de $S^\perp$ formada por vectores propios de $T|_{S^\perp}$(es decir, vectores propios de T en $S^\perp$).
Por último, siendo $V = S \oplus S^\perp$, $\{w_0\}$ base ortonormal de S y $\{w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}\}$ base ortonormal de $S^\perp$, ambas formadas por vectores propios de T resulta que $\{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ es una base ortonormal de V formada por vectores propios de T.

□

Proposición 10.8 *Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Si existe una base ortonormal de V formada por vectores propios de T y los valores propios de T tienen módulo 1 entonces T es unitario.*

Demostración: Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal de V formada por vectores propios de T, es decir que $T(v_i) = \lambda_i v_i$ con $|\lambda_i| = 1$.
Entonces

$$A = {}_B(T)_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Utilizando el producto interno usual en $\mathbb{C}^n$ se tiene:

$$\langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ |\lambda_i|^2 = 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

Por lo tanto las columnas de A son una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ (con el producto interno usual) por lo que A es unitaria. omo $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de V y ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = A$ es unitaria se concluye que T es unitaria.

□

Teorema 10.9 (Teorema Espectral para matrices unitarias)

Si $A \in \mathcal{M}(\mathbb{C})_{n\times n}$ *es una matriz unitaria, entonces existe* $P \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_{n\times n})$ *unitaria tal que* $D = \overline{P}^t AP$ *es una matriz diagonal.*

Demostración: Queda como ejercicio a cargo del lector. □

11. Clasificación de las isometrías lineales en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$.

11.1. Isometrías lineales en $\mathbb{R}^2$.

En toda esta sección trabajaremos con el producto interno usual de $\mathbb{R}^2$ (producto escalar)

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una isometría lineal tal que $T(X) = AX$. Entonces, si $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, $A =_{\mathcal{C}} (T)_{\mathcal{C}}$ es ortogonal y sabemos que sus columnas forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

Supongamos que $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Entonces

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones, entonces existen $\theta, \varphi \in [0, 2\pi)$ tales que $a_{11} = \cos\theta, a_{21} = \sin\theta$, $a_{12} = \cos\varphi$ y $a_{22} = \sin\varphi$, y la tercera ecuación se escribe como $\cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\varphi = 0$.

La expresión $\cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\varphi = 0$ equivale a $\cos(\theta - \varphi) = 0$, es decir $\theta - \varphi = \frac{\pi}{2}$ o $\theta - \varphi = -\frac{\pi}{2}$

1. Si $\theta - \varphi = -\frac{\pi}{2}$, entonces $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$ y $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\theta & \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$, es decir

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   En este caso reconocemos que la matriz A es la matriz de rotación de centro $(0, 0)$ y ángulo θ.

2. Si $\theta - \varphi = \frac{\pi}{2}$, entonces $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$ y $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\theta & \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$, es decir

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

   Pero $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, lo cuál significa que T es la composición de S_{Ox}, la simetría de eje Ox, con la rotación por el origen R_θ. Por ser una rotación, R_θ se escribe como composición de dos simetrías axiales, S_{Ox} y S_Δ, cuyos ejes pasan por el origen, es decir $R_\theta = S_\Delta \circ S_{Ox}$.

   Entonces $T = (S_\Delta \circ S_{Ox}) \circ S_{Ox}$, lo cual implica que $T = S_\Delta$, la simetría de eje Δ.

   Como A es una matriz simétrica entonces es diagonalizable. Calculando sus valores propios vemos que éstos son 1 y -1. Para buscar el eje de simetría Δ alcanza entonces hallar el subespacio propio asociado al valor propio 1 ya que los vectores de este subespacio quedan fijos por esta transformación.

Observación 11.1 *Si T es una rotación entonces* $\det(T) = \det(A) = 1$ *y si T es una simetría axial entonces* $\det(T) = \det(A) = -1$.

Como una rotación por el origen y una simetría axial cuyo eje pasa por el origen son isometrías lineales (observar que ambas llevan bases ortonormales en bases orotonormales, tenemos la siguiente conclusión:

Teorema 11.2 *$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una isometría lineal* $\Leftrightarrow \begin{cases} (a)\ T \textit{ es una rotación de centro (0,0)} \\ \textit{o bien} \\ (b)\ T \textit{ es una simetría axial cuyo} \\ \textit{eje pasa por el origen.} \end{cases}$

Observación 11.3 *Otra manera de ver el resultado obtenido en el Teorema 11.2 es recordar que si T es una isometría entonces lleva una base ortonormal en otra base ortonormal. Es decir si $\{e_1, e_2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$ entonces $\{T(e_1), T(e_2)\}$ es otra base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.*

Fijado $T(e_1)$, las posiblidades para $\{T(e_1), T(e_2)\}$ son:

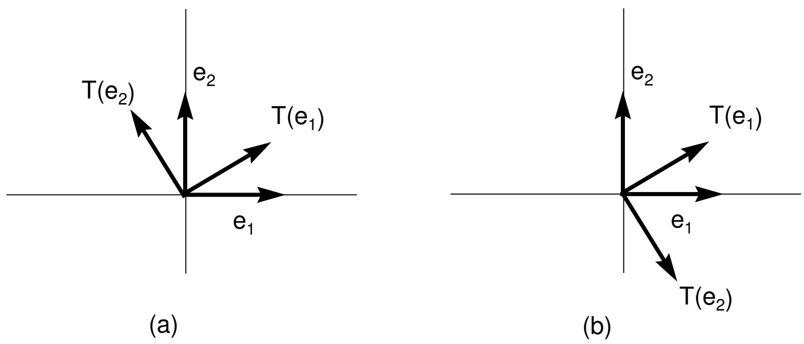

Figura 1: T lleva $\{e_1, e_2\}$ en otra base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

Es claro que el caso (a) corresponde a una rotación. Para el caso (b) vemos que si Δ es la bisectriz del ángulo $\left(\widehat{e_1, T(e_1)}\right)$ entonces Δ es la bisectriz del ángulo $\left(\widehat{e_2, T(e_2)}\right)$. Como una transformación lineal está completamente definida en una base y $||e_1|| = ||T(e_1)|| = ||e_2|| = ||T(e_2)|| = 1$ ésto prueba que T es la simetría de eje Δ.

Observar también que el dibujo ilustra como T transforma la orientación de las bases: en el caso (a) T lleva una base positiva en otra base positiva, coherentemente con que el determinante sea positivo, y en el caso (b) T lleva una base positiva en una base negativa, coherentemente con que el determinante sea negativo.

Ejemplo 10 *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por*

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

.

T es ortogonal ya que las columnas de A forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Como $\chi_(T)(t) = \left(\dfrac{12}{13} - t\right)\left(-\dfrac{12}{13} - t\right) - \frac{25}{169} = (t-1)(t+1)$, entonces T es una simetría con respecto de una recta Δ que pasa por el origen. Para hallar Δ bucamos S_1.

$$S_1 = N(T - Id) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} \frac{12}{13} - 1 & -\frac{5}{13} \\ -\frac{5}{13} & -\frac{12}{13} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x - 5y = 0 \right\} = \left[(-5,1) \right].$$

T es la simetría respecto de la recta $y = -\dfrac{1}{5}x$.

11.2. Isometrías lineales en $\mathbb{R}^3$.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una isometría lineal tal que $T(X) = AX$. Entonces A es ortogonal y sabemos que sus columnas forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Por otro lado el polinomio caracteristico de T, χ_T, es de 3er grado y con coeficientes reales, entonces existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ raiz de χ_T. Al ser T ortogonal sus raices tienen módulo 1, entonces $\lambda_0 = \pm 1$.

Sea u un versor tal $T(u) = \lambda_0 u$. Sea $\{v_1, v_2\}$ una base ortonormal de $[u]^{\perp}$ y consideramos el conjunto $B = \{u, v_1, v_2\}$. B es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Entonces ${}_B(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix}$.

Como ${}_B(T)_B$ debe ser ortogonal su primera fila debe ser un vector de norma 1 de $\mathbb{R}^3$, entonces $a = b = 0$. Por otro lado, como ${}_B(T)_B$ es ortogonal, la matriz $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ debe ser ortogonal. De acuerdo con lo hecho en la parte anterior, las posiblidades para $\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ son:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Entonces las posiblidades para la matriz ${}_B(T)_B$ son:

$$(I) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (II) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$(III) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (IV) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

• El caso (I) corresponde a una rotación de eje la recta que se identifica con el subespacio generado por $[u]$ y ángulo θ (en definitiva la rotación es sobre el plano $[u]^{\perp}$).

Si $\theta = 0$ entonces la matriz es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y corresponde a la rotación de ángulo 0.

Si $\theta = \pi$ entonces la matriz es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y corresponde a la rotación de ángulo π, es decir a la simetría axial repecto de $[u]$.

• La matriz del caso (II), por tener la misma forma de Jordan, es semejante a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, por lo tanto se puede elegir una base $\{w_1, w_2\}$ de $[u]^\perp$ y luego $D = \{u, w_1, w_2\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que ${}_D(T)_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. T representa entonces la simetría repecto del plano $[u]^\perp$.

• La matriz del caso (III) es el producto de las matrices $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, es decir es la composición de la rotación según un eje que pasa por el origen seguido de la simetría respecto de un plano.

Si $\theta = 0$, la transformación representa una simetría respecto de un plano y si $\theta = \pi$ la simetría central de centro el origen.

• La matriz del caso (IV), por tener la misma forma de Jordan, es semejante a la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Es una simetría axial respecto de una recta (¿cual?).

Ejemplo 11 (Examen Julio 2007) *Con el producto interno usual en* $\mathbb{R}^3$*, sea* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(x, y, z) = \left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}z, y, -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}z\right)$.

1. *T es ortogonal pues T transforma la base canónica (ortonormal con respecto al producto interno usual) en la base ortonormal* $\left\{\left(\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right), (0, 1, 0), \left(-\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)\right\}$

2. $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ *es la matriz asociada a la transformación en la base canónica. Su determinate es -1 y su traza es 1, luego T es una simetría respecto de un plano.*

   Para hallar la ecuación del plano, calculamos S_1 el subespacio propio asociado al valor propio 1. Como
   $$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x + 2z = 0\right\},$$
   T es la simetría respecto del plano cuya ecuación es $x + 2z = 0$.

TABLA RECAPITULATIVA

$B = \{u, u_1, u_2\}$ base ortonormal donde $T(u) = \pm u$ y $[u_1, u_2] = [u]^{\perp}$.

Matriz asociada	det	traza	Movimiento
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$	1	$1 + 2\cos\theta$	Rotación de ángulo θ respecto de $[u]$.
Caso particular: $\theta = 0$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	1	3	Identidad
Caso particular: $\theta = \pi$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	1	-1	Simetría axial respecto de $[u]$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$	-1	1	Es semejante a ${}_C((T))_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, simetría respecto del plano $S_1 = [u, \tilde{u_1}]^{(*)}$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$	-1	$-1 + 2\cos\theta$	Composición de una rotación de eje $[u]$ y ángulo θ con la simetría axial respecto de $[u]^{\perp}$.
Caso particular: $\theta = 0$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	-1	1	Simetría con respecto al plano $[u]^{\perp}$
Caso particular: $\theta = \pi$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	-1	-3	Simetría central
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$	1	-1	Es semejante a ${}_C((T))_C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, rotación respecto de $[\tilde{u_2}]^{(*)}$ Observar que, cambiando la base, se corresponde con la 3er matriz del 1er bloque.

(*) En ambos casos como $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ es semejante a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, luego cambiamos la base $\{u_1, u_2\}$ de $[u]^{\perp}$ por la base $\{\tilde{u_1}, \tilde{u_2}\}$.