Clasificación de isometrías lineales en $\mathbb{R}^3$.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ortogonal. Entonces si $T(X) = AX$, se tiene que $det(A) = \pm 1$.

1. **Si $det(T) = 1$ y $-1 \leq tr(T) \leq 3$.**

   T es una rotación de ángulo θ y existe una base ortonormal B de $\mathbb{R}^3$ en la cual

   $$_B((T))_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\theta & -sen\,\theta \\ 0 & sen\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix}.$$

   El valor de θ se halla observando que la traza vale $1 + 2\,cos\,\theta$.

   Casos particulares:

   - $det(A) = 1$ y $tr(A) = 3$. Entonces T corresponde a la identidad y $_B((T))_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   - $det(A) = 1$ y $tr(A) = -1$. Entonces T corresponde a una simetría axial y $_B((T))_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. **Si $det(T) = -1$ y $-3 \leq tr(T) \leq 1$.**

   T es la composición de una rotación de ángulo θ con una simetría axial y existe una base ortonormal B de $\mathbb{R}^3$ tal que

   $$_B((T))_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\theta & -sen\,\theta \\ 0 & sen\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix}.$$

   El valor de θ se halla observando que la traza vale $-1 + 2\,cos\,\theta$.

   Casos particulares:

   - $det(A) = -1$ y $tr(A) = 1$. Entonces T corresponde a una simetría respecto de un plano y $_B((T))_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   - $det(A) = -1$ y $tr(A) = -3$. Entonces T corresponde a una simetría central y $_B((T))_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Tabla resumen

Matriz asociada	det	tr	Movimiento
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\theta & -sen\,\theta \\ 0 & sen\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix}$	1	$\in (-1,3)$	Rotación de ángulo θ donde $1+2\,cos\,\theta = tr(T)$ y eje $S_{\lambda=1}$.
Caso particular: $\theta = 0$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	1	3	Identidad
Caso particular: $\theta = \pi$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	1	-1	Simetría axial respecto de $S_{\lambda=1}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\theta & sen\,\theta \\ 0 & sen\,\theta & -cos\,\theta \end{pmatrix}$	-1	1	Es semejante a ${}_C((T))_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, simetría respecto del plano $S_{\lambda=1}$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\theta & -sen\,\theta \\ 0 & sen\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix}$	-1	$\in (-3,1)$	Composición de una rotación de ángulo θ donde $-1+2\,cos\,\theta = tr(T)$ y eje $S_{\lambda=-1}$ con una simetría respecto al plano $(S_{\lambda=-1})^{\perp}$.
Caso particular: $\theta = 0$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	-1	1	Simetría con respecto al plano $S_{\lambda=1}$
Caso particular: $\theta = \pi$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	-1	-3	Simetría central respecto del origen
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\theta & sen\,\theta \\ 0 & sen\,\theta & -cos\,\theta \end{pmatrix}$	1	-1	Es semejante a ${}_C((T))_C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (simetría axial respecto de $S_{\lambda=1}$)