

FORMAS CUADRÁTICAS

1. MOTIVACIÓN: CLASIFICACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS

Definición 1.1. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar y sea $\mathbf{x}_0 \in U$.

- (1) Se dice que f presenta en \mathbf{x}_0 un **mínimo relativo** si existe $B(\mathbf{x}_0, \delta) \subset U$ tal que $f(\mathbf{x}_0) \leq f(x)$, para todo $x \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$. En este caso, se dice que $f(\mathbf{x}_0)$ es un **mínimo relativo** de f .
- (2) Se dice que f presenta en \mathbf{x}_0 un **máximo relativo** si existe $B(\mathbf{x}_0, \delta) \subset U$ tal que $f(\mathbf{x}_0) \geq f(x)$, para todo $x \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$. En este caso, se dice que $f(\mathbf{x}_0)$ es un **máximo relativo** de f .

Observación 1.2. Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y presenta en \mathbf{x}_0 un extremo relativo, entonces

$$df_{\mathbf{x}_0} = 0$$

Definición 1.3. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable. Un punto $\mathbf{x}_0 \in U$ es un **punto crítico** de f si $df_{\mathbf{x}_0} = 0$.

Un punto crítico \mathbf{x}_0 de f es un **punto de silla** si f no alcanza en el ni un máximo ni un mínimo relativo. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$ tales que $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0) > f(\mathbf{y})$.

Supongamos que \mathbf{x}_0 es un punto crítico de f y que f tiene desarrollo de Taylor de orden 2 (basta suponer f de clase \mathcal{C}^3).

$$f(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = df_{\mathbf{x}_0}(\Delta\mathbf{x}) + \frac{1}{2}d^2f_{\mathbf{x}_0}(\Delta\mathbf{x}) + r(\Delta\mathbf{x}), \quad \lim_{\Delta\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{r(\Delta\mathbf{x})}{\|\Delta\mathbf{x}\|^2} = 0$$

Como \mathbf{x}_0 es punto crítico tenemos $df_{\mathbf{x}_0}(\Delta\mathbf{x}) = 0$, entonces

$$f(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}d^2f_{\mathbf{x}_0}(\Delta\mathbf{x}) + r(\Delta\mathbf{x}), \quad \text{con } \lim_{\Delta\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{r(\Delta\mathbf{x})}{\|\Delta\mathbf{x}\|^2} = 0$$

Si consideramos, intuitivamente, que el resto $r(\Delta\mathbf{x})$ es despreciable, entonces el signo de $d^2f_{\mathbf{x}_0}(\Delta\mathbf{x})$ determina el signo de $\Delta f = f(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$.

El $d^2f_{\mathbf{x}_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una transformación lineal dada por

$$d^2f_{\mathbf{x}_0}(\Delta\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x} \cdot H_f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}^t$$

donde

$$H_f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

es la matriz Hessiana de f en \mathbf{x}_0 .

Observación 1.4. Si f es de clase \mathcal{C}^3 se tiene que $d^2f_{\mathbf{x}_0}$ es una forma cuadrática.

2. FORMAS CUADRÁTICAS

Definición 2.1. Una **forma cuadrática** es una función $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x} = (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

donde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ es una matriz simétrica ($a_{ij} = a_{ji}$). La matriz A se denomina **matriz asociada** a la forma cuadrática q .

Observación 2.2. Una forma cuadrática es un polinomio homogéneo de grado 2 en n variables con coeficientes reales

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

En particular, en el caso de dos variables tenemos que

$$q(x, y) = (x \ y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

Ejemplos 2.3. (1) Sea $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $q(x, y) = 3x^2 - 6xy + y^2$ tiene por matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow q(x, y) = (x \ y) \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(2) Sea $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$q(x, y, z) = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

La forma cuadrática se expresa como polinomio como $q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 - 2xy + 4xz + 2yz$.

Observación 2.4. Observar que si $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma cuadrática se tiene que $q(\mathbf{0}) = 0$.

2.1. Diagonalización de las formas cuadráticas. La matriz asociada a una forma cuadrática es simétrica y, usando el teorema espectral para matrices simétricas, sabemos que una matriz simétrica es diagonalizable sobre una base ortonormal. Entonces siempre podemos obtener una matriz semejante a la inicial que sea diagonal. Esto permite reducir a la forma cuadrática a sea suma de cuadrados.

Teorema 2.5. Toda forma cuadrática $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ puede transformarse a una forma

$$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

mediante un cambio adecuado de coordenadas $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, donde P es una matriz ortonormal.

Proof. $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x}$, donde A es una matriz simétrica. Entonces, por el teorema espectral, $\exists P$ ortogonal, tal que

$$A = PDP^t$$

donde D es una matriz diagonal. Sustituyendo en la forma cuadrática

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \cdot PDP^t \cdot \mathbf{x}$$

Consideremos el cambio de variable $\mathbf{y} = P^t \mathbf{x}$ (equivalentemente $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$), entonces

$$q(P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^t D \mathbf{y}$$

Si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ entonces $q(P\mathbf{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$.

Observar que los λ_i , $i = 1, \dots, n$, son los valores propios de A .

□

Ejemplo 2.6. Sea $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ forma cuadrática dada por $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 4yz$.

Buscar un cambio de variable lineal e invertible de manera que se eliminen los productos de dos variables diferentes.

En este caso

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 1)$. Los valores propios son $\{-1, 2, 5\}$. Por lo tanto existe un cambio de variable tal que

$$q(x, y, z) = -x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2.$$

Veamos cuál es la matriz P ortogonal tal que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

$$S_{-1} = \{(2z, -2z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \left[\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \right]$$

$$S_2 = \{(2y, y, -2y) : y \in \mathbb{R}\} = \left[\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right) \right]$$

$$S_5 = \{(x, 2x, 2x) : x \in \mathbb{R}\} = \left[\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \right]$$

Entonces

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.7. Reducir a suma de cuadrados la siguiente forma cuadrática.

$$q(x, y, z) = 2xy + 2yz.$$

La matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso los valores propios son $0, \sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$. Entonces $q(x, y, z) = -\sqrt{2}x_1^2 + \sqrt{2}x_2^2$.

2.2. Clasificación de las formas cuadráticas.

Definición 2.8 (Clasificación de formas cuadráticas). Sea $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Decimos que q es:

- **definida positiva** si $q(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ en \mathbb{R}^n .
- **semidefinida positiva** si $q(\mathbf{x}) \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\exists \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ tal que $q(\mathbf{x}_0) = 0$.
- **definida negativa** si $q(\mathbf{x}) < 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ en \mathbb{R}^n .
- **semidefinida negativa** si $q(\mathbf{x}) \leq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\exists \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ tal que $q(\mathbf{x}_0) = 0$.
- **indefinida** si existen \mathbf{x}_0 y \mathbf{x}_1 en \mathbb{R}^n tales que $q(\mathbf{x}_0) > 0$ y $q(\mathbf{x}_1) < 0$.

Teorema 2.9 (Teorema de clasificación de formas cuadráticas). Sea $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática dada por $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A\mathbf{x}^t$, donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica. Entonces

- (1) q es definida positiva si y sólo si todos los valores propios de A son positivos.
- (2) q es semidefinida positiva si y sólo si todos los valores propios de A son no negativos y 0 es valor propio de A .
- (3) q es definida negativa si y sólo si todos los valores propios de A son negativos.
- (4) q es semidefinida negativa si y sólo si todos los valores propios de A son no positivos y 0 es valor propio de A .
- (5) q indefinida si y sólo A tiene valores propios positivos y negativos.

Proof. La demostración de este teorema es una consecuencia inmediata del Teorema 2.5 ya que

$$q(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

donde los λ_i son los valores propios de A . □

Si retomamos los ejemplos previos tenemos que

- (1) $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 4yz$ es indefinida.
- (2) $q(x, y, z) = xy + yz$ es indefinida.

Ejemplo 2.10. Clasificar la forma cuadrática $q(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Los valores propios son 1, 3. Por lo tanto q es definida positiva.