Cálculo diferencial e intelgral en una variable, segundo semestre 2024

Departamento de Matemática y Aplicaciones;
Cure–Universidad de la República

Tema: Integrales, segunda parte

§1. Cálculo de integrales y área

(a) Obtener las siguientes integrales:
  (i) $\int 4x^2\,dx$
  (ii) $\int 3x^4 - x^3\,dx$
  (iii) $\int (2\,\mathrm{sen}\,x + 3\cos x)\,dx$
  (iv) $\int \left(3x^2 + 5\cos x\right)dx$
  (v) $\int \left(5x^2 + 1\right)dx$
  (vi) $\int (\cos x + \cos x)\,dx$
  (vii) $\int_1^2 2x^2\,dx$
  (viii) $\int_0^1 x^3\,dx$
  (ix) $\int_0^4 x^3\,dx$

(b) Encontrar el área entre las curvas $y = x$ y $y = x^2$.
(Graficar las curvas. Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas tales que $f(x) \geq g(x)$ sobre un intervalo $[a, b]$, entonces el área entre las dos curvas, desde a hasta b, es:

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

En este problema, las curvas se intersectan en $x = 0$ y en $x = 1$. Por lo tanto, el área es:

$$\int_0^1 \left(x - x^2\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

(c) Encontrar el área entre las curvas $y = x$ y $y = x^2$.

(d) Encontrar el área entre $y = x^2 - x^3$ y el eje x (graficar la curva).

(e) Encontrar el área entre $y = (x-1)(x+2)(x-3)$ y el eje x.

(f) Encontrar el área entre la curva $y = x^3 - 10x + 3y = x^2 - x$, y el primer punto donde se intersectan estas curvas para $y > 0$.

(g) En cada uno de los siguientes casos, encontrar la integral de la función sobre el intervalo indicado y graficar la función:
  (i) Sobre $[-1, 1]$, $f(x) = \mathrm{sen}\,x + \cos y(0.5 \leq x \leq 0.1)$.
  (ii) Sobre $[-1, 1]$, $f(x) = 3.5 + 5x$.
  (iii) Sobre $[-1, 1]$, $f(x) = 10\sin(3x)$.
  (iv) Sobre $[-1, 1]$, $f(x) = x^2$.
  (v) Sobre $[-1, 1]$, $f(x) = x^3$.
  (vi) Sobre $[-1, 1]$, $f(x) = x^4$.
  (vii) Sobre $[-1, 1]$, $f(x) = e^x$.
  (viii) Sobre $[-1, 1]$, $f(x) = |x|$.

§2. Integrales impropias

(a) Determinar si las siguientes integrales impropias existen o no y si convergen o no:
  (i) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$
  (ii) $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$
  (iii) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$
  (iv) $\int_0^5 \frac{1}{5-x^2}\,dx$
  (v) $\int_2^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$
  (vi) $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$

(b) Sea a un número > 2. Encontrar el área bajo la curva $y = 2/x$ entre 2 y a ¿Tiende esta área hacia algún límite cuando a se hace muy grande? Si es así, ¿cuál es el límite?

(c) Sea $0 < a < 1$ ¿Tiende la integral

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

hacia un límite a medida que $a \to 0$? Si es así, ¿cuál es el límite?

(d) Demostrar que la integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\operatorname{sen} x}\,dx$$

existe. [Sugerencia: Obtenga alguna cota inferior para $\operatorname{sen} x$ en términos de x por alguna constante c.]

(e) Demostrar que la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\tan x}\,dx$$

existe.

(f) Sea a un número < 1. Demostrar que la integral impropia

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx$$

existe.

(g) (i) Demostrar que $(\log x)x^{1/4}$ está acotado entre 0 y 1.

(ii) Demostrar que

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x^{1/2}}\,dx$$

existe.

(iii) Demostrar que para cualquier entero positivo n,

$$\int_0^1 \frac{(\log x)^n}{\sqrt{x}}\,dx$$

existe.