Cálculo diferencial e intelgral en una variable, segundo semestre 2024

Departamento de Matemática y Aplicaciones;
Cure–Universidad de la República

Tema: Exponentes y logaritmos

§1. El logaritmo

(a) Probar que $\log(1+x) > \frac{x}{x+1}$ para todo $x > 0$.
[Sugerencia: Hacer $f(x) = \log(1+x) - \frac{x}{x+1}$, hallar $f'(x)$ y demostrar que f es estrictamente creciente.]

(b) Probar que $\log(1+x) < x$ para todo $x > 0$.

(c) Sea h un número positivo. Comparar el área bajo la curva $1/(x+1)$ y $1+h$ con el área de rectángulos adecuados para mostrar que:
$$\frac{1}{1+h} < \log(1+h) < 1.$$

(d) ¿Cuál es la relación entre este límite y la derivada de $\log(1+x)$ en $x=1$?

(e) Probar que para cada entero positivo n se cumple que:
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n.$$

(f) (i) Sea
$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$
para cada entero $n \geq 2$. Mostrar que γ_n es decreciente.
(ii) Sea $\gamma = \lim_{n\to\infty} \gamma_n$. Mostrar que $\gamma > 0$.
(iii) La sucesión de números positivos γ_n es decreciente, mientras que la sucesión de números positivos a_n, creciente. Como $a_n \to 0$, se va haciendo arbitrariamente pequeño conforme n sea grande, se sigue que existe un número mínimo C tal que:
$$\gamma_n < C < \gamma$$
para todos los enteros positivos n. Este número C es la constante de Euler. Probar que esta constante no es un número racional.

(g) Derivar las siguientes funciones:
(i) $\log_2(x+5)$
(ii) $\log_7(x^3)$
(iii) $\log(\arcsin x)$
(iv) $\log(\arccos 2x)$
(v) $\log(x^2 + x^3)$
(vi) $x^{\log x}$

(h) Dibujar las siguientes curvas:
(i) $y = \log_3(x+1)$
(ii) $y = \log(x+1)$
(iii) $y = \log_2(x-5)$
(iv) $y = \log_5(x+1)$

(i) Sea $x > 0$ y $y > 0$. Mostrar que:
$$\log_2 8 + \log_3 9 = \log 4.$$

§2. La función exponencial

(a) ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^{2x}$ en el punto de abscisa?
(i) 1,
(ii) -2,
(iii) 0.

(b) ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^{x/2}$ en el punto de abscisa?
(i) -4,
(ii) 1,
(iii) 0.

(c) ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = xe^x$ en el punto de abscisa 2?

(d) Encontrar las derivadas de las siguientes funciones:

(i) $\operatorname{sen} 3x$,
(ii) $\log(e^x + \operatorname{sen} x)$,
(iii) $\operatorname{sen}(e^{4x} - 5)$.

(e) Encontrar las derivadas de las siguientes funciones:
(i) $\arctan \log x$,
(ii) $\log \cos(3x + 5)$,
(iii) $e^{\arctan x}$,
(iv) $\log e^x$,
(v) $\log e^{x^2}$,
(vi) x/e^x,
(vii) $e^{-\arctan x}$,
(viii) $\tan e^{x^2}$,
(ix) $\arctan e^{2x}$,
(x) $\arcsin(e^x + x)$,
(xi) $\tan e^x$.

(f) Demostrar por inducción que la n-ésima derivada de $x^n e^x$ es $(x + n)e^x$ para todos los enteros $n \geq 1$.

(g) (i) Demostrar por inducción que la n-ésima derivada de $x^n e^{-x}$ es $(-1)^n (x - n)e^{-x}$.
(ii) Demostrar que la derivada de orden $n + 1$ de $x^n \log x$ es $n!/x$.

(h) (i) Dibujar la curva $y = e^{-1/x}$ (definida para $x \neq 0$).
(ii) Dibujar la curva $y = e^{-1/x^2}$ (definida para $x \neq 0$).

(i) Sea $f(x)$ una función derivable definida en algún intervalo y que satisfaga la relación $f'(x) = Kf(x)$ para alguna constante K. Mostrar que existe una constante C tal que $f(x) = Ce^{Kx}$.

(j) Sea $f(x)$ una función derivable tal que $f'(x) = -2xf(x)$. Mostrar que existe una constante C tal que $f(x) = Ce^{-x^2}$.

(k) Generalizando, supóngase que hay una función h tal que $f'(x) = h'(x)f(x)$. Mostrar que $f(x) = Ce^{h(x)}$.

§3. La función exponencial general

(a) ¿Cuál es la derivada de 10^x? ¿Y la de 7^x?

(b) ¿Cuál es la derivada de 3^x? ¿Y la de π^x?

(c) (i) ¿Cuál es la derivada de la función x^x (definida para $x > 0$)?
[Sugerencia: $x^x = e^{x \log x}$.]
(ii) ¿Cuál es la derivada de la función $(x^x)^{(x^x)}$?

(d) ¿Cuál es la derivada de:
(i) $x^x \log x$,
(ii) $x^{x^x} \log x$?

(e) Si a, b son números tales que $a > 0$, mostrar que $\log b^a = b \log a$.

(f) Dibujar las curvas $y = 3^x$ y $y = 3^{-x}$.

(g) Dibujar las curvas $y = 2^x$ y $y = 2^{-x}$.

(h) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^x$ en el punto $x = 1$.

(i) Encontrar la ecuación de la recta tangente a cada curva del ejercicio 1 en $x = 0$.

(j) Encontrar la ecuación de la recta tangente a cada curva del ejercicio 2 en $x = 2$.