

Cálculo diferencial e integral en una variable, segundo semestre 2024

Departamento de Matemática y Aplicaciones;
Cure–Universidad de la República

TEMA: INTEGRALES

§1. la integral indefinida

Encontrar las integrales indefinidas para las funciones siguientes:

- (a) $\sin 2x$
- (b) $\cos 3x$
- (c) $\frac{1}{x+1}$
- (d) $\frac{1}{x+2}$

(Especificar en los últimos dos problemas los intervalos en los que se encuentre la integral indefinida.)

§2. Área

Encontrar el área bajo las curvas dadas entre los puntos señalados:

- (a) $y = x^3$ entre $x = 1$ y $x = 5$.
- (b) $y = x$ entre $x = 0$ y $x = 2$.
- (c) $y = \cos x$, un arco.
- (d) $y = 1/x$ entre $x = 1$ y $x = 2$.
- (e) $y = 1/x$ entre $x = 1$ y $x = 3$.
- (f) $y = x^4$ entre $x = -1$ y $x = 1$.
- (g) $y = e^x$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

§3. Sumas superiores e inferiores

Escribir las sumas superior e inferior de las siguientes funciones e intervalos. Utilizar una partición tal que la longitud de cada subintervalo sea: (a) $\frac{1}{2}$, (b) $\frac{1}{3}$, (c) $\frac{1}{4}$, (d) $1/n$.

- (i) $f(x) = x^2$ en el intervalo $[1, 2]$.
- (ii) $f(x) = 1/x$ en el intervalo $[1, 3]$.
- (iii) $f(x) = x$ en el intervalo $[0, 2]$.
- (iv) $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 2]$.
- (a) Sea $f(x) = 1/x$ definida en el intervalo $[1, 2]$ y sea n un entero positivo. Escribir las sumas superior e inferior correspondientes a la partición cuyos subintervalos sean de longitud $1/n$.
- (b) Probar que

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \leq \log 2 \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}.$$

- (c) Sea $f(x) = \log x$. Sea n un entero positivo. Escribir las sumas superior e inferior correspondientes a la partición del intervalo entre 1 y n , formado por los enteros desde 1 hasta n , es decir, la partición $(1, 2, \dots, n)$.
- (d) Calcular, por medio de trapezoides, una aproximación del área bajo la curva $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$. Tomar las bases de los trapezoides como: (a) $\frac{1}{2}$, (b) $\frac{1}{4}$. Comparar el valor obtenido con el valor exacto dado por la integral. Comparar también con los valores obtenidos mediante las sumas superiores e inferiores.
- (e) Hacer lo mismo que en el ejercicio anterior, pero para la curva $f(x) = x^2$ en el intervalo $[1, 2]$. Trazar figuras en cada caso.