

# Cálculo diferencial e integral en una variable, segundo semestre 2024

Departamento de Matemática y Aplicaciones;  
Cure–Universidad de la República

## TEMA: INTEGRALES

### §1. la integral indefinida

Encontrar las integrales indefinidas para las funciones siguientes:

- (a)  $\sin 2x$
- (b)  $\cos 3x$
- (c)  $\frac{1}{x+1}$
- (d)  $\frac{1}{x+2}$

(Especificar en los últimos dos problemas los intervalos en los que se encuentre la integral indefinida.)

### §2. Área

Encontrar el área bajo las curvas dadas entre los puntos señalados:

- (a)  $y = x^3$  entre  $x = 1$  y  $x = 5$ .
- (b)  $y = x$  entre  $x = 0$  y  $x = 2$ .
- (c)  $y = \cos x$ , un arco.
- (d)  $y = 1/x$  entre  $x = 1$  y  $x = 2$ .
- (e)  $y = 1/x$  entre  $x = 1$  y  $x = 3$ .
- (f)  $y = x^4$  entre  $x = -1$  y  $x = 1$ .
- (g)  $y = e^x$  entre  $x = 0$  y  $x = 1$ .

### §3. Sumas superiores e inferiores

Escribir las sumas superior e inferior de las siguientes funciones e intervalos. Utilizar una partición tal que la longitud de cada subintervalo sea: (a)  $\frac{1}{2}$ , (b)  $\frac{1}{3}$ , (c)  $\frac{1}{4}$ , (d)  $1/n$ .

- (i)  $f(x) = x^2$  en el intervalo  $[1, 2]$ .
  - (ii)  $f(x) = 1/x$  en el intervalo  $[1, 3]$ .
  - (iii)  $f(x) = x$  en el intervalo  $[0, 2]$ .
  - (iv)  $f(x) = x^2$  en el intervalo  $[0, 2]$ .
- (a) Sea  $f(x) = 1/x$  definida en el intervalo  $[1, 2]$  y sea  $n$  un entero positivo. Escribir las sumas superior e inferior correspondientes a la partición cuyos subintervalos sean de longitud  $1/n$ .
  - (b) Probar que

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \leq \log 2 \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}.$$

- (c) Sea  $f(x) = \log x$ . Sea  $n$  un entero positivo. Escribir las sumas superior e inferior correspondientes a la partición del intervalo entre 1 y  $n$ , formado por los enteros desde 1 hasta  $n$ , es decir, la partición  $(1, 2, \dots, n)$ .
- (d) Calcular, por medio de trapezoides, una aproximación del área bajo la curva  $f(x) = x^2$  en el intervalo  $[0, 1]$ . Tomar las bases de los trapezoides como: (a)  $\frac{1}{2}$ , (b)  $\frac{1}{4}$ . Comparar el valor obtenido con el valor exacto dado por la integral. Comparar también con los valores obtenidos mediante las sumas superiores e inferiores.
- (e) Hacer lo mismo que en el ejercicio anterior, pero para la curva  $f(x) = x^2$  en el intervalo  $[1, 2]$ . Trazar figuras en cada caso.